



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

L Soc 1640.5



HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

XIX

32-33

Cet ouvrage se trouve aussi :

| | | | |
|----------------|---|---------------|---------------------------------------|
| A ANGOULÊME .. | chez PÉREZ-LECLERC. | A NANCY..... | chez G. GRIMBLOT et C ^{ie} . |
| BORDEAUX. | — CHAUMAS. | NANTES..... | { — FOREST. |
| BOURGES. | — VERMEIL. | | { — GUÉRAUT. |
| BREST. | — M ^e V ^e LEFOURNIER. | ORLÉANS. | — GATINEAU. |
| CHERBOURG... | — LEFRANÇOIS. | RENNES..... | — VERDIER. |
| LILLE..... | — VANACKÈRE. | ROCHEFORT.. | — M ^{me} FLEURY. |
| LORIENT. | — LEROUX-CASSART. | ROUEN..... | — LEBRUMENT. |
| LYON..... | { — PÉRISSÉ frères. | STRASBOURG. } | — TREUTTEL et WURTZ. |
| | — GIBERTON et BRUN. | | — M ^{me} LEVRAULT. |
| MARSEILLE.... | — CAMOIN. | | — DERIVAUX. |
| METZ..... | — WARION. | TOULON..... | — MONGE et WILLAMUS. |
| MONTPELLIER. | — SÉWALLE. | TOULOUSE.... | — GIMET. |

ET A L'ÉTRANGER :

| | | | |
|----------------|------------------------------|---------------|-----------------------------------|
| A AMSTERDAM... | chez VAN BAKKENES. | | chez M ^{me} ANT. POUPART |
| BERLIN..... | — B. BEHR. | A MADRID..... | { et frère. |
| BRUXELLES .. | — DECQ.—PÉRICHON. | | { — JAYMEON et C ^{ie} . |
| CAMBRIDGE. . | — DEIGTON. | | { — MONNIER. |
| COPENHAGUE.. | — HOST. | MILAN..... | — DUMOLARD. |
| FLORENCE.... | — PIATTI. | NAPLES..... | — DUFRESNE. |
| GÈNES. | — BRUF. | NEW-YORK.... | — BÉRAUD et MONDON. |
| GENÈVE..... | — CHERBULIEZ. | PÉTERSBOURG. | — GRAFF. — BELLI- |
| LA HAYE..... | — VAN-CLEEF frères. | | ZARD. |
| LEIPSIG. | — MICHELSEN. | ROME..... | — MERLE. |
| LONDRES..... | — BAILLIÈRE. | STOCKHOLM.. | — BONIER. |
| — | — DULAU et C ^{ie} . | TURIN..... | — BOCCA. |
| | | VIENNE..... | — ROHRMANN. |

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION
DE CET ÉTABLISSEMENT.

TRENTE-DEUXIÈME CAHIER.

TOME XIX.



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

A LEIPZIG, CHEZ MICHELSEN.

||

A LONDRES, CHEZ DULAU ET C^{ie}.

1848.

LSoc1640.5



612

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES (*).

PAR M. OSSIAN BONNET,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

§ I. — *Démonstrations simples de l'existence des lignes de courbure, des théorèmes d'Euler, Meunier, Dupin, etc.*

1. Soit une surface représentée par l'équation

$$z = f(x, y).$$

Considérons un point A sur cette surface, et la normale AN en ce point (*fig. 1*); les cosinus des angles que la droite AN fait avec les parties positives OX, OY, OZ des axes des coordonnées auront respectivement pour valeurs

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

(*) Ce Mémoire étant d'abord destiné à former une Thèse, nous avons placé dans le § I, pour obtenir une exposition complète de la théorie des surfaces, quelques résultats connus et publiés récemment par M. Bertrand: nous n'avons pas cru devoir les supprimer ici, dans la crainte d'altérer l'ensemble de notre travail; du reste, ces résultats ne sont qu'en petit nombre. On trouvera aussi dans les §§ III, V, VII la substance du Mémoire sur la théorie des lignes tracées sur une même surface, qui a été présenté à l'Académie le 11 novembre 1844.

p et q représentant les dérivées partielles

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy},$$

déduites de l'équation de la surface, et le radical étant pris positivement, si nous supposons, comme il convient de le faire, pour fixer les idées, que la normale AN soit menée dans la région de l'espace que l'on considère comme extérieure à la surface, et qui est celle pour laquelle la coordonnée z reçoit un accroissement positif lorsque, laissant x et y constants, on passe du point A à un point infiniment voisin situé dans cette région extérieure (*).

Prenons sur la surface deux autres points B et C infiniment voisins de A, et de manière que les deux droites AB et AC soient perpendiculaires l'une à l'autre; de plus, et afin qu'il n'en résulte plus tard aucune difficulté dans l'emploi de ces droites, supposons que AB, AC et la normale extérieure AN soient respectivement situées, par rapport au point A, comme le sont ordinairement les parties positives de trois axes de coordonnées rectangulaires considérées dans l'ordre OX, OY, OZ, par rapport à leur origine O, c'est-à-dire de manière qu'en se plaçant suivant AN, les pieds en A et la tête en N, on ait AB à sa gauche et AC à sa droite. Si nous appelons λ , μ , ν les angles moindres que 180 degrés que la droite AB fait avec les parties positives des axes des coordonnées, et λ_1 , μ_1 , ν_1 ceux que la droite AC fait avec les parties positives des mêmes axes, nous aurons, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{aligned} & \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + AB \left(\frac{d \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} \cos \lambda + \frac{d \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} \cos \mu \right), \\ & \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + AB \left(\frac{d \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} \cos \lambda + \frac{d \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} \cos \mu \right), \\ & \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + AB \left(\frac{d \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} \cos \lambda + \frac{d \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} \cos \mu \right) \end{aligned}$$

(*) Une surface partage, en général, l'espace en deux régions, dont l'une, arbitrairement choisie d'ailleurs, est appelée la région extérieure, et l'autre la région intérieure. Pour tous les points d'une même région, le premier membre de l'équation de la surface a le même signe, et pour deux points de région différente, le signe est contraire; ordinairement on dispose du premier membre de l'équation de manière qu'il soit positif pour les points de la région extérieure.

pour les cosinus des angles que la normale menée extérieurement à la surface au point B fait avec les parties positives des axes; et

$$\begin{aligned} & \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + AC \left(\frac{d \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} \cos \lambda_1 + \frac{d \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} \cos \mu_1 \right), \\ & \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + AC \left(\frac{d \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} \cos \lambda_1 + \frac{d \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} \cos \mu_1 \right), \\ & \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + AC \left(\frac{d \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} \cos \lambda_1 + \frac{d \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} \cos \mu_1 \right) \end{aligned}$$

pour les cosinus des angles que la normale menée extérieurement à la surface au point C fait avec les mêmes parties positives des axes.

2. Supposons maintenant que la normale AN soit prise pour partie positive de l'axe des z , AB pour partie positive de l'axe des x , et AC pour partie positive de l'axe des y , auquel cas

$$\begin{aligned} p = 0, \quad q = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = \nu = \frac{\pi}{2}, \\ \mu_1 = 0, \quad \lambda_1 = \nu_1 = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

il viendra

$$-r \cdot AB, \quad -s \cdot AB, \quad 1$$

pour les cosinus des angles que la normale menée extérieurement à la surface au point B fait respectivement avec les droites AB, AC, AN, et

$$-s \cdot AC, \quad -t \cdot AC, \quad 1$$

pour les cosinus des angles que la normale au point C fait respectivement avec les mêmes droites AB, AC, AN, en posant, bien entendu, comme on le fait ordinairement,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = r, \quad \frac{d^2 z}{dx dy} = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{dq}{dy} = t.$$

Nous concluons de là que si $AB = AC$, l'angle plus petit que 180 degrés que la normale menée extérieurement à la surface au point B fait avec la droite AC, est égal à celui que la normale menée extérieurement à la surface

au point C fait avec \dot{AB} ; ou, ce qui revient au même, que l'angle infiniment petit que la normale au point B fait avec le plan NAB, cet angle étant toutefois précédé du signe + quand la normale en B tombe du côté du plan NAB où se trouve AC, et du signe — dans le cas contraire, est égal et de signe contraire à l'angle que la normale au point C fait avec le plan NAC, ce second angle étant aussi positif ou négatif, selon que la normale en C tombe ou non du côté du plan NAC où se trouve la droite AB' , qui est placée par rapport à AC comme AC l'est par rapport à AB. Dépouillant ce résultat, pour le rendre plus clair, des conventions faites sur le sens des normales et des droites AB et AC, et sur les signes des angles, on obtient le suivant :

3. *Si sur une surface on prend trois points A, B, C infiniment voisins et formant un triangle isocèle et rectangle en A, et que par ces points on mène des normales à la surface, toutes les trois du même côté de la surface, l'angle infiniment petit que la normale au point B fera avec le plan de AB et de la normale au point A sera égal à l'angle infiniment petit que la normale au point C fera avec le plan de AC de la normale au point A; de plus, les normales aux points B et C se trouveront, ou toutes deux dans l'intérieur de l'angle dièdre droit formé par le plan de AB et de la normale au point A, et le plan de AC et de la normale au point A, ou bien toutes deux à l'extérieur de cet angle dièdre.*

4. De ce qui précède on peut facilement conclure, avec M. Bertrand, l'existence des lignes de courbure.

En effet, conservant la figure du n° 1, concevons que l'on fasse tourner le plan NAB autour de NA et de NAB vers NAC; en même temps imaginons que, par les différentes positions que viendra occuper le point B, on mène des normales à la surface, toujours extérieurement à cette surface; chacune des normales fera avec le plan NAB, pris dans la position correspondante, un angle qui variera, quand on passera d'une position à la suivante, d'une manière continue et de façon à changer de signe quand le plan NAB sera venu s'appliquer sur NAC. Cela nous montre évidemment qu'entre NAB et NAC, il existe au moins une position du plan NAB pour laquelle la normale à la surface au point B se trouve dans ce plan: ainsi se trouve démontrée l'existence des lignes de courbure. Reste à déterminer combien il passe de ces lignes par un même point A de la surface.

5. Prenons pour partie positive de l'axe des z la normale menée extérieurement à la surface au point A (*fig. 2*), pour axe des x la tangente à la ligne de courbure connue qui passe par ce point, enfin pour axe des y une perpendiculaire à l'axe des x et à celui des z , cet axe des y se trouvant dès lors, comme l'axe des x , situé dans le plan tangent de la surface au point A; de plus, supposons, comme plus haut, que les parties positives de l'axe des x et des y soient choisies de telle sorte, qu'en se plaçant les pieds en A, la tête en Z, on ait la partie positive de l'axe des x à gauche, et la partie positive de l'axe des y à droite. D'abord l'axe des y sera tangente à une seconde ligne de courbure passant en A, c'est ce qui résulte du théorème de M. Bertrand, énoncé au n° 3; et l'on aura non-seulement

$$p = 0, \quad q = 0,$$

mais encore

$$s = 0,$$

ainsi qu'on le voit en se reportant aux formules du n° 2.

Ainsi, nous pouvons déjà conclure qu'il existe deux lignes de courbure passant en A, et perpendiculaires l'une à l'autre en ce point; je dis, de plus, qu'il n'en existe pas d'autres. Prenons, en effet, une direction quelconque AX' dans le plan des xy ; en appelant α l'angle positif (*) de cette direction avec AX, nous aurons, d'après les formules du n° 1, pour les cosinus des angles que fait avec les parties positives des axes des coordonnées la normale menée extérieurement à la surface en un point D, infiniment voisin de A et situé sur AX',

$$-AD \cdot r \cos \alpha, \quad -AD \cdot t \sin \alpha, \quad 1.$$

De là on déduit aisément le cosinus de l'angle que la normale au point D fait avec la droite AY', qui occupe dans le plan des xy , par rapport à AX', la même position que AY par rapport à AX, ou, ce qui revient au même, aux infiniment petits près du second ordre, l'angle infiniment petit que la

(*) Par angle positif d'une droite de direction déterminée, et situé dans le plan des xy avec la partie positive de l'axe des x , j'appelle, comme on le fait toujours en géométrie analytique, l'angle compte en allant de la partie positive de l'axe des x vers la partie positive de l'axe des y ; on comprend de même ce que sera l'angle positif d'une droite située dans un autre plan coordonné avec la partie positive des axes situés dans ce plan.

normale extérieure en D fait avec le plan ZAD, cet angle étant toutefois précédé du signe + toutes les fois que la normale en D tombe du côté du plan NAD où se trouve AY', et du signe — dans le cas contraire. On trouve ainsi

$$AD \sin \alpha \cos \alpha (r - t).$$

Si AX' était la direction d'une nouvelle ligne de courbure, l'expression précédente devrait être nulle. Or c'est ce qui ne peut arriver en général. En effet, $\sin \alpha \cos \alpha$ est différent de zéro, et $r - t$ ne peut pas non plus être nul, sans quoi toute direction autour du point A serait celle d'une ligne de courbure; et ce cas, pour lequel le point A est dit un ombilic de la surface, est purement exceptionnel.

6. Proposons-nous maintenant de trouver les rayons de courbure des différentes sections normales faites dans la surface au point A, et d'établir les relations qui existent entre eux. Conservant la figure du numéro précédent, nous pouvons, en premier lieu, trouver aisément les rayons de courbure correspondant aux sections normales ZAX, ZAY qui sont tangentes aux lignes de courbure passant en A, et que l'on nomme sections principales. Ces rayons sont en effet respectivement égaux, en négligeant des infiniment petits du second ordre, et en faisant d'abord abstraction des signes, au rapport de l'élément AB de la première section normale au cosinus de l'angle que la normale à la surface au point B fait avec AB, et au rapport de l'élément AC de la seconde section normale au cosinus de l'angle que la normale à la surface au point C fait avec AC; de telle sorte qu'en les appelant R, R', et conservant les notations posées plus haut, on a

$$R = -\frac{1}{r}, \quad R' = -\frac{1}{t}.$$

Ajoutons seulement que la généralité des valeurs précédentes exige que les rayons de courbure R et R' soient précédés du signe + quand le centre de courbure correspondant se trouve sur la normale intérieure, et du signe — quand le centre de courbure est sur la normale extérieure.

7. Soit en second lieu une section normale quelconque ZAD : le cosinus de l'angle que forme avec AD la normale menée extérieurement à la surface au point D peut être considéré, aux infiniment petits près du second ordre,

et abstraction faite du signe, comme égal à l'angle que la projection de cette normale sur le plan ZAD forme avec l'axe des z . Donc ce cosinus, divisé par AD, donne la courbure de la section normale ZAD que nous appellerons $\frac{1}{\rho}$, ρ étant dès lors le rayon de courbure; seulement, il est important de le remarquer, ce rayon de courbure a ainsi un signe, qui d'ailleurs est déterminé de la même manière que pour les sections principales. Or α étant l'angle DAB, la normale extérieure à la surface normale au point D fait avec les axes, comme on l'a vu (n° 5), des angles dont les cosinus sont respectivement

$$- AD \cdot r \cos \alpha, \quad - AD \cdot t \sin \alpha, \quad 1 :$$

le cosinus de l'angle de cette normale avec AD, ou, ce qui revient au même, l'angle positif ou négatif de la projection de cette normale sur le plan ZAD avec AZ est donc

$$- (r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha) AD;$$

par conséquent,

$$\frac{1}{\rho} = - r \cos^2 \alpha - t \sin^2 \alpha = \frac{1}{R} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R'} \sin^2 \alpha.$$

C'est la relation que l'on doit à Euler. On peut, comme l'on sait, en tirer plusieurs conséquences importantes. Nous nous bornerons à indiquer la suivante qui, du reste, les comprend toutes implicitement.

8. *Si l'on construit une ellipse ayant pour axes $2\sqrt{R}$ et $2\sqrt{R'}$, le diamètre de cette ellipse, qui fait avec l'axe $2\sqrt{R}$ l'angle α , sera égal à $2\sqrt{\rho}$, c'est-à-dire au double de la racine carrée du rayon de courbure de la section normale que fait un angle α avec la section principale correspondante au rayon de courbure R (*).*

9. Les valeurs des rayons de courbure R et R' obtenues dans le n° 6

(*) Dans cet énoncé, on suppose les rayons de courbure R et R' positifs. Mais il est bien entendu que si R et R' sont l'un et l'autre négatifs, auquel cas ρ est lui-même toujours négatif, on doit remplacer R , R' , ρ respectivement par $-R$, $-R'$, $-\rho$; et que si un seul des rayons de courbure R , R' est négatif, R' par exemple, auquel cas ρ peut être ou positif, ou négatif, au lieu d'une ellipse, on doit prendre une hyperbole ayant $2\sqrt{R}$ pour axe transverse, et $2\sqrt{-R'}$ pour axe non transverse, et qu'alors le module de $2\sqrt{\rho}$ est un axe transverse ou non transverse de cette hyperbole, selon que ρ est positif ou négatif.

permettent de mettre sous une autre forme la valeur

$$AD \sin \alpha \cos \alpha (r - t)$$

de l'angle i , positif ou négatif selon les cas indiqués au n° 5, que la normale extérieure à la surface au point D fait avec le plan ZAD; il est clair, en effet, qu'on peut écrire

$$i = -\frac{1}{2} AD \sin 2\alpha \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right).$$

Cette formule est due à M. Bertrand.

10. Nous pouvons aussi calculer facilement l'angle infiniment petit que forment deux normales à la surface menées par deux points consécutifs. Considérons sur la surface un rectangle infiniment petit ABCD (*fig. 3*), formé par des éléments de lignes de courbure, et proposons-nous de trouver l'angle que forment les deux normales aux deux sommets opposés A et C de ce rectangle, et menées d'un même côté de la surface. Par un point quelconque O, tirons des parallèles aux normales en A, B, C, prenons sur ces parallèles des longueurs OA', OB', OC' respectivement égales à 1, et joignons A'B', A'C', B'C'; nous aurons un triangle A'B'C' sensiblement plan et rectangle en B', qui nous donnera

$$\overline{A'C'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2.$$

Or il est clair que A'C' est l'angle θ que nous cherchons, et que A'B' et A'C' sont égaux respectivement aux valeurs absolues de $\frac{AB}{R}$ et $\frac{BC}{R'}$. Nous appelons R le rayon de courbure positif ou négatif au point B ou au point A de la section principale tangente à AB, et R' le rayon de courbure positif ou négatif au point B de la section principale tangente à BC, ou, ce qui revient au même, en négligeant des infiniment petits du premier ordre, le rayon de courbure au point A de la section principale tangente à AD. On a donc

$$\theta^2 = \left(\frac{AB}{R} \right)^2 + \left(\frac{BC}{R'} \right)^2.$$

D'ailleurs, en posant $BAC = \alpha$,

$$AB = AC \cos \alpha, \quad BC = AC \sin \alpha;$$

donc

$$\left(\frac{\theta}{AC}\right)^2 = \frac{\cos^2 \alpha}{R^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'^2},$$

d'où

$$\theta = AC \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{R^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'^2}}.$$

11. On peut déduire cette dernière formule de celle de M. Bertrand établie au n° 9, en raisonnant comme il suit :

Soient A et D deux points infiniment voisins sur la surface, menons (*fig. 4*) par un point quelconque O les lignes OA', OD', OD'' respectivement parallèles à la normale à la surface au point A, à la normale au point D, et à la projection de cette dernière normale sur le plan de AD et de la normale en A. On aura, comme tout à l'heure, en prenant sur ces parallèles des longueurs égales à 1, et joignant les extrémités, un triangle infiniment petit, sensiblement rectangle en D'', et qui donnera

$$\overline{A'D'}^2 = \overline{A'D''}^2 + \overline{D'D''}^2.$$

Or D'D'' peut être considéré comme égal à la valeur absolue de l'angle i que la normale au point D fait avec le plan conduit par la normale au point A et l'élément AD, angle qui est égal, d'après ce qu'on a vu plus haut (n° 9), à

$$-\frac{AD}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right),$$

en représentant par R et R' les deux rayons de courbure principaux de la surface relatifs au point A, et par α l'angle positif que fait AD avec le plan de la section principale correspondante au rayon de courbure R; A'D'' est égal à la valeur absolue du rapport de AD au rayon de courbure ρ au point A de la section normale à la surface dirigée suivant AD; enfin, A'D' est évidemment l'angle θ que nous cherchons. Nous avons donc

$$\theta^2 = \overline{AD}^2 \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)^2 \frac{\sin^2 2\alpha}{4} + \frac{1}{\rho^2} \right],$$

ou en remplaçant $\frac{1}{\rho}$ par sa valeur déduite de la formule d'Euler,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \alpha}{R} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'},$$

il vient, comme on l'a déjà trouvé,

$$\theta = AD \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{R^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'^2}}.$$

12. Cette valeur peut être mise sous une forme beaucoup plus simple. Considérons la section conique qui a pour axes les modules de $2\sqrt{R}$ et de $2\sqrt{R'}$, et dont il a été déjà question au n° 8; appelons $2d$ le diamètre réel ou imaginaire de cette courbe qui fait l'angle α avec l'axe $2\sqrt{R}$, et $2d'$ le diamètre conjugué de $2d$: on aura, d'après des formules de géométrie analytique connues,

$$\frac{1}{d^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{R} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'},$$

$$\frac{1}{d'^2} = \frac{RR'}{d^2 (R^2 \sin^2 \alpha + R'^2 \cos^2 \alpha)}.$$

Donc

$$\left(\frac{\theta}{AD}\right)^2 = \frac{d'^2}{d^2 RR'}.$$

Mais ϕ étant l'angle des deux diamètres conjugués $2d$ et $2d'$, on a

$$d^2 d'^2 \sin^2 \phi = RR'.$$

Donc

$$\left(\frac{\theta}{AD}\right)^2 = \frac{1}{d^2 \sin^2 \phi};$$

d'où

$$\theta = \pm \frac{AD}{d^2 \sin \phi},$$

ou, enfin,

$$\theta = \pm \frac{AD}{\rho \sin \phi};$$

ρ représentant, comme plus haut, le rayon de courbure positif ou négatif de la section normale qui fait l'angle positif α avec la section principale correspondante au rayon de courbure R .

13. La formule que l'on vient d'obtenir présente, à cause du signe \pm de son second membre, une ambiguïté qu'il est possible de faire disparaître en donnant un signe à θ et une autre définition à l'angle ϕ : c'est ce que nous allons expliquer. Je dis d'abord, avec M. Dupin, que ϕ est l'angle que forme la tangente AD (fig. 3) de la section normale correspondante au rayon de

courbure ρ avec la plus courte distance des normales à la surface menées par les deux points infiniment voisins A et D, ou, ce qui revient au même, avec l'intersection des deux plans tangents en A et D. En effet, le plan tangent en un point quelconque a pour équation

$$Z - z = p (X - x) + q (Y - y),$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes, et x, y, z les coordonnées du point de contact. Prenons sa trace sur le plan des xy , on aura

$$-z = p (X - x) + q (Y - y);$$

et si nous supposons que le point (x, y, z) soit le point D, auquel cas

$$x = AD \cos \alpha, \quad y = AD \sin \alpha, \quad z = 0,$$

$$p = AD (r \cos \alpha + s \sin \alpha), \quad q = AD (s \cos \alpha + t \sin \alpha),$$

il viendra, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$0 = X (r \cos \alpha + s \sin \alpha) + Y (s \cos \alpha + t \sin \alpha),$$

et en remarquant que AX est la direction d'une ligne de courbure,

$$Xr \cos \alpha + Yt \sin \alpha = 0.$$

Or le coefficient angulaire de cette droite est $\frac{Y}{X} = -\frac{r}{t} \cot \alpha$, celui de AD est $\tan \alpha$; donc le produit de ces deux coefficients angulaires $= -\frac{r}{t}$. Cela prouve que AD et l'intersection du plan tangent en D avec le plan des xy , ou le plan tangent en A, représentent en direction deux diamètres conjugués de l'ellipse qui a pour axes les modules de $\frac{2}{\sqrt{-r}}$ et de $\frac{2}{\sqrt{-t}}$, ou de $2\sqrt{R}$ et de $2\sqrt{R'}$, d'après le n° 6. Ainsi, l'angle ϕ est bien l'angle que fait AD avec l'intersection des deux plans tangents en A et D, ou mieux avec la perpendiculaire commune aux normales correspondantes. Ceci posé, si l'on suppose que les deux normales en A et D dont on veut avoir l'angle

soient extérieures à la surface; que cet angle θ soit considéré comme positif ou négatif, selon que la normale en D tombe ou non du côté du plan de la normale en A et de AD où se trouve la direction AY' définie au n° 5; que φ soit l'angle positif (c'est-à-dire compté de AX' vers AY') que forme avec AX' la perpendiculaire commune aux deux normales en A et D, prolongée de la première à la seconde de ces lignes, et enfin que ρ ait le signe que lui donnent les conventions faites au n° 7, on reconnaît que le signe — est celui qu'il faut toujours adopter dans le second membre de la formule du numéro précédent; de telle sorte que l'on a simplement

$$\theta = - \frac{AD}{\rho \sin \varphi}.$$

Pour se convaincre de ce que nous avançons, il suffit de remarquer que le point où la perpendiculaire commune aux deux normales en A et D rencontre la première de ces normales, est toujours compris entre le point A et le centre de courbure de la section normale à la surface dirigée suivant AD, comme on le voit aisément en construisant l'épure qui sert à déterminer cette plus courte distance, dans l'hypothèse où le plan de la normale en A et de AD est l'un des plans de projection.

14. Nous allons encore chercher l'angle de deux normales infiniment voisines à une surface par une méthode qui nous conduira à quelques conséquences dignes de remarque.

Posons-nous la question de la manière suivante : Étant donnée une courbe quelconque AmB (*fig. 5*), on lui mène par ses différents points des normales, et il s'agit de déterminer l'angle que forment deux de ces lignes infiniment voisines.

Soient m, m', m'' trois éléments consécutifs de la courbe AmB; par le point m menons : 1° celle des normales considérées qui se rapporte à l'élément mm' , et que nous appellerons mN ; 2° une parallèle à celle des normales considérées qui se rapporte à l'élément $m'm''$, que nous appellerons mN' ; 3° une perpendiculaire à mm' située dans le plan $N'mm'$, de mN' et de la parallèle mm' à $m'm''$, que nous appellerons mP . Ces trois droites formeront un trièdre dont les angles plans seront tous trois infiniment petits, et dans lequel les deux faces NmP et $N'mP$ seront sensiblement perpendi-

culaires l'une à l'autre; on aura donc

$$\overline{NmN'}^2 = \overline{NmP}^2 + \overline{N'mP}^2;$$

en même temps le trièdre $mPm'm'_1$ donnera

$$0 = \cos Pmm'_1 \cos m'mm'_1 + \sin Pmm'_1 \sin m'mm'_1 \cos \widehat{Pmm'_1, m'mm'_1},$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$0 = \pm PmN' + m'mm'_1 \cos \widehat{Pmm'_1, m'mm'_1},$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, selon que l'angle Pmm'_1 est aigu ou obtus.

Par le point m menons encore la normale principale mC de la courbe au point m , une parallèle mC' à la normale principale au point m' , et enfin une perpendiculaire mD à mm' dans le plan osculateur $mm'm''$ au point m' . Si nous appelons θ l'angle infiniment petit NmN' , précédé du signe $+$ ou du signe $-$, selon que la normale mN' tombe ou non du côté du plan $m'mN$, où se trouve la droite mE qui occupe, par rapport à mm' et à mN , la position ordinaire de l'axe des y par rapport à celui des x et à celui des z ; que, de plus, $d\tau$ soit l'angle de contingence $m'mm'_1$ au point m' ou au point m , $d\omega$ l'angle CmD des plans osculateurs en m et m' , ou plutôt la différence positive ou négative des angles positifs (c'est-à-dire comptés de mN vers mE) que forment avec mN les deux droites mD et mC ; et enfin α l'angle positif que fait avec mN la normale principale mC , de manière que $\alpha + d\alpha$ soit l'angle analogue que forme avec mN' la normale principale en m' : d'abord la première de nos égalités reviendra à

$$\theta^2 = \overline{NmP}^2 + \overline{N'mP}^2,$$

et la seconde à

$$\pm PmN' = \cos \alpha d\tau,$$

le signe supérieur ou inférieur devant être choisi comme il a été dit plus haut. Puis, en remarquant que les droites mN , mP , mC , mD sont dans un même plan, et que PmD est égal à l'angle que la normale principale de la

courbe en m' fait avec la normale mN' relative au même point, ainsi qu'on le voit aisément en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, on trouve

$$\pm NmP = d\omega - d\alpha,$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être adoptés selon que la normale mN' tombe ou non du côté du plan Nmm' où se trouve mE . De là on déduit

$$\theta^2 = \cos^2 \alpha d\tau^2 + (d\omega - d\alpha)^2.$$

15. Nous pouvons obtenir une autre valeur de θ : appelons ϕ l'angle que le plan NmN' fait avec le plan NmP , ou mieux l'angle positif (c'est-à-dire compté de mm' vers mE) que la perpendiculaire commune aux deux droites mN et mN' , menée du côté du plan NmN' où se trouve le point m' , fait avec mm' ; le trièdre $mNN'P$ donne sans ambiguïté

$$\sin \phi = \frac{\cos \alpha d\tau}{\theta},$$

d'où

$$\theta = \frac{\cos \alpha d\tau}{\sin \phi}.$$

16. Le résultat précédent ne diffère pas de celui que nous avons obtenu au n° 12. Supposons en effet que la courbe AmB soit tracée sur une surface, et que les normales $mN, m'N', \dots$ à la courbe soient de plus normales extérieures à cette surface; ϕ sera bien l'angle positif que forme mm' avec la plus courte distance des normales à la surface menées par les deux points infiniment voisins m et m' , et $\frac{mm'}{\cos \alpha d\tau}$ le rayon de courbure changé de signe, de la section normale dirigée suivant mm' , d'après le théorème de Meunier qui va être démontré un peu plus bas. Quant à la valeur $\theta = \pm \sqrt{\cos^2 \alpha d\tau^2 + (d\omega - d\alpha)^2}$ du n° 14, si nous la comparons à celle qui a été d'abord obtenue au n° 11, et qui est $\theta = AD \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)^2 \frac{\sin^2 2\alpha}{4}}$, on voit que

$$AD \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} = \pm (d\omega - d\alpha),$$

puisque $\frac{AD}{\rho} = -\cos \alpha d\tau$; donc

$$i = \pm (d\omega - d\alpha).$$

16 bis. La valeur de i que l'on vient d'obtenir devant nous servir dans la suite, nous allons la déterminer par une autre méthode, en tâchant de fixer le signe qui l'accompagne. Je remarquerai d'abord que cette valeur de i pourrait être immédiatement déduite de l'une des formules du n° 14. Il est clair, en effet, en négligeant des infiniment petits du second ordre, que i est égal à l'angle que l'on a appelé NmP dans ce numéro; on a donc $i = \pm (d\omega - d\alpha)$, ou simplement $i = d\omega - d\alpha$, si l'on veut regarder i comme positif ou négatif, selon que la normale mN' tombe ou non du côté du plan Nmm' où se trouve mE . Mais on peut encore obtenir la valeur de i d'une manière plus nette et plus directe, comme il suit: Conservons la figure et toutes les notations du n° 14, en supposant seulement que AmB soit une certaine courbe tracée sur une surface, et que les normales mN , mN' à la courbe soient, de plus, normales à la surface; menons en outre une perpendiculaire mG à mC qui occupe, par rapport à cette ligne, la même position que mN par rapport à mE , et une perpendiculaire mG' à mC' qui occupe, par rapport à cette autre ligne, la même position que mN' par rapport à mE' . On voit aisément que les cosinus des angles que fait mN' avec les trois droites mm''_1 , mC' , mG' sont respectivement, et dans tous les cas,

$$0, \quad \cos(\alpha + d\alpha), \quad \sin(\alpha + d\alpha).$$

On peut aussi avoir les cosinus des angles que forme mE avec les mêmes droites mm''_1 , mC' , mG' . En effet, le trièdre formé par mE , mm' et mm''_1 , donne d'abord, pour le cosinus de l'angle de mE et de mm''_1 ,

$$\cos \widehat{mE, mm''_1} = \sin \alpha d\tau,$$

$d\tau$ étant l'angle de contingence $m'mm''_1$ de la courbe proposée. Puis, en remarquant que mG' est, comme mG , perpendiculaire à mm' , puisque mG et $m'G'$ sont des normales aux deux plans osculateurs en m et m' de la courbe proposée, on trouve sans peine, pour le cosinus de l'angle de mE avec mG' ,

$$\cos \widehat{mE, mG'} = -\cos(\alpha + d\omega),$$

en appelant, comme plus haut, $d\omega$ la différence infiniment petite des angles positifs (c'est-à-dire comptés de mN vers mE) que forment mD et mC avec mN ; enfin, le cosinus de l'angle de mE et de mC' sera $\pm \sin(\alpha + d\omega)$, pour que la somme des carrés des cosinus des angles de la droite mE avec les trois droites rectangulaires mm' , mC' , mG' soit égale à l'unité; et, de plus, on voit aisément par la figure, que le signe placé devant le cosinus doit toujours être le signe $+$. Ainsi,

$$\cos \widehat{mE, mC'} = \sin(\alpha + d\omega).$$

Ayant maintenant les cosinus des angles que les deux droites mN' et mE forment avec les trois droites rectangulaires mm' , mC' , mG' , nous pouvons aisément calculer le cosinus de l'angle de ces deux droites, ou, ce qui revient au même, en négligeant les infiniment petits du second ordre, l'angle i que forme mN' avec le plan Nmm' ; et il vient

$$i = \cos(\alpha + d\alpha) \sin(\alpha + d\omega) - \sin(\alpha + d\alpha) \cos(\alpha + d\omega) = \sin(d\omega - d\alpha),$$

ou simplement

$$i = d\omega - d\alpha.$$

Telle est la valeur de l'angle cherchée. On voit qu'elle coïncide avec celle que nous avons obtenue plus haut, et que sa généralité exige que l'angle i soit précédé du signe $+$ quand la normale mN' tombe dans l'angle dièdre positif formé par Nmm' et NmE , et du signe $-$ dans le cas contraire. Pour abrégé, nous appellerons désormais seconde courbure géodésique d'une courbe le rapport que l'on obtient en divisant par l'élément de l'arc de la courbe la différence $d\omega - d\alpha$ des angles infiniment petits $d\omega$ et $d\alpha$ nettement définis plus haut: nous basons cette dénomination sur ce que, lorsque la courbe est une ligne géodésique de la surface, le rapport dont il s'agit se réduit à la seconde courbure de la ligne. Ceci posé, le résultat que nous venons d'obtenir s'énonce ainsi: *Étant donnés une courbe AmB tracée sur une surface, et deux points m et m' infiniment voisins sur cette courbe, l'angle i que fait la normale extérieure à la surface au point m' avec le plan de la normale extérieure au point m , et de mm' , est égal à la seconde courbure géodésique de la courbe au point m , multipliée par mm' . Ajoutons, pour compléter cet énoncé, que l'angle i est positif ou négatif, selon que*

la normale extérieure à la surface en m' tombe ou non du côté du plan de la normale en m et de l'élément mm' , où l'on doit mener la perpendiculaire à ce plan pour que cette perpendiculaire, que nous appellerons mE , l'élément mm' et la normale extérieure à la surface en m soient respectivement placées, par rapport au point m , comme le sont, par rapport à l'origine, la partie positive de l'axe des y et celles des x et des z ; et que par seconde courbure de la courbe $mm'm'' \dots$ au point m , on appelle le rapport à mm' de la différence de deux angles infiniment petits $d\omega$ et dx , dont le premier est l'accroissement que reçoit l'angle positif (c'est-à-dire compté de mN vers mE) que forme avec la normale mN à la surface la normale principale mC à la courbe au point m , quand on passe de m en m' , et dont le second est la différence qui existe entre les deux angles positifs que forment avec mN les deux perpendiculaires mD et mC à mm' , menées respectivement dans les plans osculateurs de la courbe en m' et en m .

17. Quand la ligne $mm'm'' \dots$ est une ligne de courbure de la surface, l'angle que la normale à la surface au point m' fait avec le plan de la normale au point m et de mm' est égal à zéro; la propriété précédente nous montre donc que, pour toute ligne de courbure d'une surface, la seconde courbure géodésique est nulle, ou, en d'autres termes, l'angle positif infiniment petit que forment les plans osculateurs correspondants à deux points infiniment voisins m et m' est toujours égal à la différence positive des angles que ces plans osculateurs font avec les plans tangents correspondants. La réciproque est aussi vraie.

Ce curieux théorème, qui a été énoncé, pour la première fois, par Lancret, dans son premier Mémoire sur les lignes à double courbure, et dont M. Liouville a donné plus tard une démonstration géométrique très-simple (*Journal de Mathématiques*, tome XI), est très-fécond en conséquences utiles: on en déduit, par exemple, que si deux surfaces se coupent partout sous un angle constant, et que la courbe d'intersection soit une ligne de courbure de l'une des surfaces, elle sera aussi une ligne de courbure de la seconde surface.

18. La formule

$$\theta = - \frac{AD}{\rho \sin \varphi},$$

du n° 13, peut fournir plusieurs résultats importants ; nous nous bornons à indiquer le suivant. Supposons que AD fasse, avec la tangente à la section principale correspondante au rayon de courbure R, l'angle que le diamètre qui a même valeur que son conjugué dans la section conique dont les axes sont les modules de $2\sqrt{R}$ et $2\sqrt{R'}$ fait avec l'axe $2\sqrt{R}$. On aura évidemment

$$\pm \rho \sin \phi = \sqrt{RR'},$$

le signe du premier membre étant celui qui le rend positif, et le second membre étant réduit à son module; par conséquent,

$$\frac{\theta}{AD} = \frac{1}{\sqrt{RR'}},$$

θ étant réduit à sa valeur absolue.

Ainsi, le module de $\frac{1}{\sqrt{RR'}}$, ou ce que M. Gauss appelle *la courbure de la surface au point A*, est égale à l'angle des plans tangents aux points A et D divisé par AD, AD étant le premier élément de la section normale qui fait avec la tangente à la section principale correspondante au rayon de courbure R un angle dont la tangente est égale au module de $\sqrt{\frac{R'}{R}}$.

19. Si la surface considérée est une surface réglée, la génératrice rectiligne fait évidemment avec la section principale correspondante au rayon R un angle qui a pour tangente le module de $\sqrt{\frac{R'}{R}}$. On peut donc dire que la courbure, dans une surface gauche, est égale à l'angle des plans tangents au point considéré et au point infiniment voisin appartenant à la même génératrice rectiligne, divisé par la distance de ces deux points.

20. Dans les n° 6, 7, 8, il n'a été question que des rayons de courbure des sections normales faites dans la surface. Or il existe une relation très-simple entre le rayon de courbure d'une section oblique quelconque et celui de la section normale qui a un élément commun sur la surface avec cette section oblique. Cette relation, qui est connue sous le nom de *théorème de Meunier*, peut être simplement établie comme il suit:

Soient OZ (*fig. 6*) la normale extérieure à la surface en un point quel-

conque O, ZOX le plan d'une section normale en ce point, Z'OX le plan d'une section oblique ayant un élément commun sur la surface avec la section normale ZOX, et faisant avec elle un angle ZOZ', que nous appellerons θ . Par le point A situé sur OX et infiniment voisin de O, menons extérieurement à la surface, AU normale à cette surface, et AU' normale à la section oblique Z'OX; l'angle UAU' sera égal à θ en négligeant un infiniment petit du premier ordre. Mais le trièdre formé par AU, AX, AU', qui est évidemment rectangle en AU', donne

$$\cos UAX = \cos U'AX \cos UAU';$$

d'où, en négligeant les infiniment petits du second ordre, et appelant ρ et ρ' les rayons de courbure respectifs des deux sections ZOX, Z'OX,

$$\rho' = \rho \cos \theta;$$

ce qui n'est autre chose que la relation annoncée. Ajoutons seulement qu'en prenant toujours pour θ l'angle des normales à la section normale et à la section oblique menées par le point de contact O extérieurement à la surface, il faut, pour la généralité de la formule précédente, que le rayon de courbure de la section oblique soit, comme celui de la section normale, regardé comme positif ou négatif, selon que le centre de courbure de cette section oblique est ou non situé sur la normale à cette section menée intérieurement à la surface; et que, si l'on veut considérer le rayon de courbure ρ comme toujours positif, θ doit être l'angle que forme, avec la normale intérieure à la surface, la normale principale de la section oblique dirigée de la courbe vers le centre de courbure.

On peut déduire, du théorème de Meunier, une conséquence remarquable due à Hachette, et reproduite plus tard par M. Binet (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XIX), qui nous sera utile plus loin.

21. *Considérons deux surfaces S et S₁, qui, par leur intersection, donnent une courbe AmB. Par un point m de cette courbe menons un plan tangent à chacune des surfaces; le plan tangent à la surface S coupera la surface S₁ suivant une courbe s₁, et le plan tangent à la surface S₁, la surface S suivant une courbe s. Supposons que mP et mQ soient, en grandeur et en direc-*

tion, les courbures respectives $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r_1}$ des courbes s et s_1 au point m (*); si l'on construit sur mP et mQ un parallélogramme, la diagonale mR de ce parallélogramme représentera, en grandeur et en direction, la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la courbe AmB au point m .

Appelons, en effet, α, a, a_1 les angles que font, respectivement avec la normale intérieure à la surface S au point m , les normales principales au même point des courbes AmB, s et s_1 , chacune de ces normales étant d'ailleurs dirigée de la courbe à laquelle elle se rapporte vers le centre de courbure correspondant; soient aussi β, b, b_1 les angles respectifs que font avec la normale intérieure à la surface S_1 au point m , les mêmes normales principales des courbes AmB, s, s_1 : il est évident que l'on aura $a_1 = 90^\circ$, $b = 90^\circ$; et, d'après le théorème de Meunier,

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{\rho} \cos \alpha, & \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} \cos a, \\ \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{\rho} \cos \beta, & \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{r_1} \cos b_1,\end{aligned}$$

en appelant R et R_1 les rayons de courbure, positifs ou négatifs suivant la loi indiquée au n° 7, des sections normales faites dans les surfaces S et S_1 tangentiellement à AmB au point m . De là on déduit sans peine

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \cos \alpha &= \frac{1}{r} \cos a + \frac{1}{r_1} \cos a_1, \\ \frac{1}{\rho} \cos \beta &= \frac{1}{r} \cos b + \frac{1}{r_1} \cos b_1;\end{aligned}$$

ce qui prouve que la projection de la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la courbe AmB est égale à la somme des projections des courbures $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r_1}$ des courbes s et s_1 , pour deux axes de projection situés dans le plan des directions de ces trois courbures. Or cela ne peut évidemment avoir lieu que si $\frac{1}{\rho}$ est, en grandeur et en direction, la diagonale du parallélogramme construit sur $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r_1}$. Comme il fallait le démontrer.

(*) J'appelle direction de la courbure d'une courbe en un point celle de la droite qui joint ce point au centre de courbure correspondant.

§ II. — *Démonstrations simples des théorèmes de MM. Dupin et Lamé sur les surfaces orthogonales.*

22. Le théorème de M. Dupin consiste, comme l'on sait, en ce que, *si trois séries de surfaces se coupent orthogonalement, leurs intersections ne seront autre chose que leurs lignes de courbure.*

Ce théorème peut être très-simplement établi comme il suit :

Considérons trois séries de surfaces orthogonales, et soient en un point A (*fig. 7*), AX, AY, AZ les tangentes aux courbes d'intersections des trois surfaces qui y passent; ces tangentes, que l'on peut aussi considérer comme les normales aux surfaces au point A, étant d'ailleurs menées de manière à se trouver en même temps dans la position ordinaire des axes des coordonnées et dans la région extérieure aux surfaces auxquelles elles se rapportent, ce qui est toujours possible, puisque l'on peut choisir arbitrairement la région extérieure à chaque surface. Cela posé, prenons sur ces tangentes des longueurs AM, AN, AP infiniment petites et égales entre elles; enfin, imaginons en chacun des points M, N, P les normales aux deux des surfaces considérées qui passent par ces points.

Si nous appelons i_x et i'_x les angles infiniment petits que les normales NX'' et PX''' font respectivement avec les plans XAY et XAZ, i_y et i'_y les angles infiniment petits que les normales PY''' et MY' font respectivement avec les plans YAZ et YAX; enfin i_z et i'_z les angles infiniment petits que les normales MZ' et NZ'' font respectivement avec les plans ZAX et ZAY : tous ces angles étant susceptibles d'un double signe qui se déterminera sans difficulté, comme on l'a vu au n° 5, nous aurons les trois relations suivantes :

$$i_x + i_z = 0,$$

$$i_y + i_x = 0,$$

$$i_z + i_y = 0.$$

En effet, i_x par exemple, qui est la seconde courbure géodésique multipliée par AN, de celle des intersections des surfaces proposées qui a pour tangente AY, en tant du moins que l'on considère cette courbe comme tracée sur la surface qui a AX pour normale, est d'abord égal à i'_z , qui est la seconde courbure géodésique multipliée aussi par AN, de la même courbe considérée comme tracée sur la surface qui a AZ pour normale; c'est ce que l'on voit aisément en se reportant à la définition de la seconde courbure géodésique

donnée au n° 16 *bis*, et en remarquant que les surfaces se coupent à angle droit. En second lieu; i'_x , qui est l'angle que fait la normale NZ'' avec le plan ZAM , est égal et de signe contraire à i_x , qui est l'angle de la normale MZ' avec le plan ZAM ; donc i_x et i'_x sont aussi de signes contraires. Ajoutant les deux premières égalités et retranchant la troisième, il vient

$$i_x = 0,$$

$$\text{d'où} \quad i_x = i'_x = i_y = i'_y = i_z = i'_z = 0.$$

Ce qui prouve bien que AX , AY , AZ sont les directions des lignes de courbure des surfaces passant par le point A .

23. Quand trois séries de surfaces se coupent orthogonalement, il existe des relations remarquables entre les rayons de courbure principaux des trois surfaces qui passent par un même point. Nous allons nous proposer d'établir ces formules, que l'on doit à M. Lamé.

Soient trois surfaces faisant partie d'un système triple de surfaces orthogonales, et passant par un point déterminé A de l'espace (*fig. 8*). Ces surfaces, en se coupant, donneront trois courbes. Considérons ces trois courbes comme des axes de coordonnées, et appelons-les, en adoptant pour plus de commodité les notations de M. Lamé, axes des s , s_1 , s_2 relatifs au point A ; les surfaces auxquelles ces axes sont perpendiculaires étant, dès lors, les surfaces des s, s_2 , des s_2, s et des s, s_1 . Enfin, représentons par (γ_1, c_2) , (γ_2, c) , (γ, c_1) les rayons de plus grande et de plus petite courbure des surfaces des s, s_2 , s_2, s et s, s_1 ; l'indice étant toujours celui de la coordonnée tangente à la section principale correspondante, et le signe de ces rayons de courbure étant déterminé comme au n° 7, au moyen des normales extérieures aux surfaces, normales qui seront ici les tangentes AT , AT_1 , AT_2 aux courbes coordonnées menées d'ailleurs dans le sens suivant lequel on est convenu de compter les arcs positifs de ces courbes.

Ceci posé, les formules que l'on doit à M. Lamé sont les neuf suivantes :

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{d\frac{1}{c}}{ds} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\gamma_2} \right), & \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{c_1} \right), \\ \frac{d\frac{1}{c_1}}{ds} = \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{\gamma} \right), & \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{c_2} \right), \\ \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} = \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right), & \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} = \frac{1}{c_2} \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{c} \right); \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \frac{d^{\frac{1}{c}}}{ds_1} + \frac{d^{\frac{1}{\gamma_1}}}{ds} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma_1 c_1}, \\ \frac{d^{\frac{1}{c_1}}}{ds_2} + \frac{d^{\frac{1}{\gamma_2}}}{ds_1} = \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_1 c_2}, \\ \frac{d^{\frac{1}{c_2}}}{ds} + \frac{d^{\frac{1}{\gamma}}}{ds_2} = \frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma_2 c}, \end{cases}$$

dont six seulement sont distinctes. Pour les démontrer par l'origine A des axes courbes des s, s_1, s_2 , menons une droite quelconque AX, et appelons $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ les angles que font avec cette droite les tangentes AT, AT₁, AT₂ au point A des courbes AS, AS₁, AS₂. Prenons, à partir du point A, sur les axes des s, s_1, s_2 , des longueurs infiniment petites AM, AM₁, AM₂, et imaginons les axes des s, s_1, s_2 relatifs aux points M, M₁, M₂, c'est-à-dire les intersections des trois surfaces faisant partie du triple système de surfaces orthogonales proposé qui passent respectivement en ces points. Nous allons nous proposer d'abord de calculer les angles que les tangentes à ces nouveaux axes font avec la droite AX.

Considérons les axes relatifs au point M, et d'abord l'axe des s_1 . Soit $\cos \alpha + d_1 \cos \alpha_1$ le cosinus de l'angle que sa tangente au point M fait avec AX. Si par le point A nous menons une parallèle AT'₁ à cette tangente, les trois droites AT'₁, AT, et AX formeront un trièdre qui donnera

$$\cos \alpha + d_1 \cos \alpha_1 = \cos \alpha, \cos T, AT'_1 + \sin \alpha, \sin T, AT'_1 \cos T, AX, \widehat{T, AT'_1},$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$d_1 \cos \alpha_1 = \sin \alpha, T, \widehat{AT'_1} \cos T, AX, \widehat{T, AT'_1}.$$

D'un autre côté, le trièdre formé par AT₁, AX, AT donne

$$\cos \alpha = \sin \alpha, \cos TAT'_1, \widehat{T, AX} = \pm \sin \alpha, \cos T, AX, \widehat{T, AT'_1}.$$

Le signe supérieur convenant si l'angle que forme AT'₁ avec AT est plus petit que celui que forme AT₁, et le signe inférieur dans le cas contraire, on

a donc

$$d_s \cos \alpha = \pm T, AT' \cos \alpha;$$

d'où

$$d_s \cos \alpha = AM \frac{\cos \alpha}{c},$$

formule qui est générale en vertu du signe de c . On trouverait évidemment, par un raisonnement analogue,

$$d_s \cos \alpha_2 = AM \frac{\cos \alpha}{\gamma},$$

et aussi

$$d_{s_1} \cos \alpha_2 = AM_1 \frac{\cos \alpha_1}{c_1},$$

$$d_{s_1} \cos \alpha = AM_1 \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1},$$

$$d_{s_2} \cos \alpha = AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{c_2},$$

$$d_{s_2} \cos \alpha_1 = AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2}.$$

On appelle, comme on le devine aisément, $\cos \alpha + d_s \cos \alpha$, $\cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2 + d_{s_2} \cos \alpha_2$, les cosinus des angles que font avec AX les tangentes au point M des axes des s, s_1, s_2 relatifs à ce point; $\cos \alpha + d_{s_1} \cos \alpha$, $\cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2 + d_{s_1} \cos \alpha_2$, les cosinus des angles que font avec AX les tangentes au point M, des axes des s, s_1, s_2 relatifs à ce point; enfin, $\cos \alpha + d_{s_2} \cos \alpha$, $\cos \alpha_1 + d_{s_2} \cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2 + d_{s_2} \cos \alpha_2$, les cosinus des angles que font avec AX les tangentes au point M, des axes des s, s_1, s_2 relatifs à ce point.

Calculons maintenant l'angle que la tangente à l'axe des s' au point M fait avec AX. Menons par le point A, en la dirigeant de la courbe vers le centre de courbure, la normale principale AN de la courbe AS, et la parallèle AT' à la tangente au point M de cette courbe; le trièdre que forment AT', AN et AX nous donnera

$$\cos \alpha + d_s \cos \alpha = \cos NAX \cos NAT' + \sin NAX \sin NAT' \cos \widehat{NAX, NAT'},$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\cos \alpha + d_s \cos \alpha = \cos NAX . TAT' + \sin NAX \cos \widehat{NAX, NAT'}.$$

Mais le trièdre formé par AT, AN et AX donne

$$\cos \alpha = \sin NAX \cos \widehat{NAX, NAT'} = \sin NAX \cos \widehat{NAX, NAT'};$$

donc

$$d_s \cos \alpha = TAT' \cos NAX,$$

ou, en appelant ρ le rayon de courbure de la ligne AS au point A,

$$d_s \cos \alpha = AM \cdot \frac{\cos NAX}{\rho}.$$

D'un autre côté, AS étant l'intersection des deux surfaces ss_1 et ss_2 qui font entre elles un angle droit au point A, $\frac{1}{\rho}$ doit être, en grandeur et en direction, d'après le théorème de Hachette démontré au n° 21, la diagonale du rectangle construit sur les courbures $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{\gamma}$, considérées indépendamment de leurs signes. Donc $\frac{\cos NAX}{\rho}$, ou la projection de $\frac{1}{\rho}$ sur AX, doit égaler la somme des projections de ces courbures sur AX, c'est-à-dire

$$-\frac{\cos \alpha_1}{c} - \frac{\cos \alpha_2}{\gamma},$$

en remarquant que les rayons de courbure c et γ sont positifs quand leur direction est opposée à celle des normales extérieures, et négatifs dans le cas contraire.

Ainsi,

$$d_s \cos \alpha = -AM \left(\frac{\cos \alpha_1}{c} + \frac{\cos \alpha_2}{\gamma} \right).$$

On trouverait de la même manière

$$d_{s_1} \cos \alpha_1 = -AM_1 \left(\frac{\cos \alpha_2}{c_1} + \frac{\cos \alpha}{\gamma_1} \right),$$

$$d_{s_2} \cos \alpha_2 = -AM_2 \left(\frac{\cos \alpha}{c_2} + \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_2} \right).$$

Ces formules, jointes à celles qui ont été établies plus haut, font connaître les cosinus des angles que forment avec AX les tangentes aux points M, M₁, M₂ des axes des s , s_1 , s_2 relatifs à ces points; en rétablissant les infiniment petits du second ordre qui ont été laissés de côté dans les démon-

trations précédentes, elles peuvent être écrites comme il suit :

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha + d_s \cos \alpha = \cos \alpha - AM \left(\frac{\cos \alpha_1}{c} + \frac{\cos \alpha_2}{\gamma} \right) + \epsilon, \\ \cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1 = \cos \alpha_1 + AM \frac{\cos \alpha}{c} + \epsilon', \\ \cos \alpha_2 + d_{s_2} \cos \alpha_2 = \cos \alpha_2 + AM \frac{\cos \alpha}{\gamma} + \epsilon'', \\ \cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1 = \cos \alpha_1 - AM_1 \left(\frac{\cos \alpha_2}{c_1} + \frac{\cos \alpha}{\gamma_1} \right) + \epsilon_1, \\ \cos \alpha_2 + d_{s_2} \cos \alpha_2 = \cos \alpha_2 + AM_1 \frac{\cos \alpha_1}{c_1} + \epsilon'_1, \\ \cos \alpha + d_{s_1} \cos \alpha = \cos \alpha + AM_1 \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1} + \epsilon''_1, \\ \cos \alpha_2 + d_{s_2} \cos \alpha_2 = \cos \alpha_2 - AM_2 \left(\frac{\cos \alpha}{c_2} + \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_2} \right) + \epsilon_2, \\ \cos \alpha + d_{s_2} \cos \alpha = \cos \alpha + AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{c_2} + \epsilon'_2, \\ \cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1 = \cos \alpha_1 + AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2} + \epsilon''_2. \end{array} \right.$$

Déterminons maintenant les cosinus des angles que font avec AX les tangentes aux axes des s , s_1 , s_2 relatifs aux points P, P₁, P₂, intersections respectives de l'axe des s relatif au point M₂ avec l'axe des s_1 relatif au point M₁, de l'axe des s_1 relatif au point M avec l'axe des s relatif au point M₂, et de l'axe des s relatif au point M₁ avec l'axe des s_2 relatif au point M₂; comme chacun de ces cosinus peut être calculé de deux manières différentes, nous obtiendrons ainsi des relations que nous fourniront les formules de M. Lamé.

Considérons en premier lieu le cosinus de l'angle que forme avec AX la tangente au point P de l'axe des s relatif à ce point. Nous pouvons l'obtenir, soit au moyen de la valeur de $\cos \alpha + d_{s_1} \cos \alpha$ déduite des formules (c), en supposant que $\cos \alpha$, AM_1 , $\cos \alpha_1$, $\frac{1}{\gamma_1}$, ϵ''_1 , au lieu de se rapporter au point A, se rapportent au point M₂, et deviennent, par conséquent,

$$\cos \alpha + d_{s_1} \cos \alpha, AM_1 + d_{s_1} AM_1, \cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1, \frac{1}{\gamma_1} + d_{s_1} \frac{1}{\gamma_1}, \epsilon''_1 + d_{s_1} \epsilon''_1,$$

soit au moyen de la valeur de $\cos \alpha + d_{s_2} \cos \alpha$ déduite des mêmes formules,

en supposant que $\cos \alpha$, AM_2 , $\cos \alpha_2$, $\frac{1}{c_2}$, ϵ'_2 , au lieu de se rapporter au point A , se rapportent au point M_1 , et deviennent, par conséquent,

$$\cos \alpha + d_{s_1} \cos \alpha, AM_2 + d_{s_1} AM_2, \cos \alpha_2 + d_{s_1} \cos \alpha_2, \frac{1}{c_2} + d_{s_1} \frac{1}{c_2}, \epsilon'_2 + d_{s_1} \epsilon'_2.$$

De la première manière nous trouvons

$$\cos \alpha + d_{s_1} \cos \alpha + (AM_1 + d_{s_1} AM_1) (\cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1) \left(\frac{1}{\gamma_1} + d_{s_1} \frac{1}{\gamma_1} \right) + \epsilon'_1 + d_{s_1} \epsilon'_1;$$

mais

$$d_{s_1} \cos \alpha = AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{c_2} + \epsilon'_2,$$

$$d_{s_1} \cos \alpha_1 = AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2} + \epsilon'_2,$$

et enfin, ainsi qu'on le voit aisément,

$$d_{s_1} AM_1 = AM_1 AM_2 \frac{1}{c_1} + \zeta,$$

ζ étant un infiniment petit du troisième ordre.

Donc, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, le cosinus considéré a pour valeur

$$\begin{aligned} \cos \alpha + AM_1 \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1} + AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{c_2} + AM_1 AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2} \frac{1}{\gamma_1} + AM_1 \cos \alpha_1 d_{s_1} \frac{1}{\gamma_1} \\ + AM_1 AM_2 \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1} \frac{1}{c_1} + \epsilon'_2 + \epsilon'_1. \end{aligned}$$

Si nous le calculons de la seconde manière, il vient

$$\cos \alpha + d_{s_1} \cos \alpha + (AM_2 + d_{s_1} AM_2) (\cos \alpha_2 + d_{s_1} \cos \alpha_2) \left(\frac{1}{c_2} + d_{s_1} \frac{1}{c_2} \right) + \epsilon'_2 + d_{s_1} \epsilon'_2;$$

mais

$$d_{s_1} \cos \alpha = AM_1 \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1} + \epsilon'_1,$$

$$d_{s_1} \cos \alpha_2 = AM_1 \frac{\cos \alpha_1}{c_1} + \epsilon'_1,$$

et enfin

$$d_{s_1} AM_2 = AM_1 AM_2 \frac{1}{\gamma_2} + \zeta',$$

ζ' étant un infiniment petit du troisième ordre.

Donc, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on a

$$\begin{aligned} \cos \alpha + AM_1 \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1} + AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{c_2} + AM_1 AM_2 \frac{\cos \alpha_1}{c_1} \frac{1}{c_2} + AM_2 \cos \alpha_2 d_{s_1} \frac{1}{c_2} \\ + AM_1 AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{c_2} \frac{1}{\gamma_2} + \epsilon'_2 + \epsilon''_1. \end{aligned}$$

Égalant cette valeur à la précédente, faisant $AM_1 = AM_2$, et remarquant que

$$\begin{aligned} \frac{d_{s_1} \frac{1}{\gamma_1}}{AM_2} &= \frac{d \frac{1}{\gamma_1}}{ds_2}, \\ \frac{d_{s_1} \frac{1}{c_2}}{AM_1} &= \frac{d \frac{1}{c_2}}{ds_1}, \end{aligned}$$

on trouve

$$\cos \alpha_1 \frac{d \frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} + \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_1 \gamma_2} + \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1 c_1} = \cos \alpha_2 \frac{d \frac{1}{c_2}}{ds_1} + \frac{\cos \alpha_1}{c_1 c_2} + \frac{\cos \alpha_2}{c_2 \gamma_2}.$$

On verrait de même, en calculant les cosinus des angles que font avec AX la tangente au point P₁ de l'axe des s₁ relatif à ce point, et la tangente au P₂ de l'axe des s₂ relatif à ce point,

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 \frac{d \frac{1}{\gamma_2}}{ds} + \frac{\cos \alpha}{\gamma_2 \gamma} + \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2 c_2} &= \cos \alpha \frac{d \frac{1}{c}}{ds_2} + \frac{\cos \alpha_2}{c_2 c} + \frac{\cos \alpha}{c \gamma}, \\ \cos \alpha \frac{d \frac{1}{\gamma}}{ds_1} + \frac{\cos \alpha_1}{\gamma \gamma_1} + \frac{\cos \alpha}{\gamma c} &= \cos \alpha_1 \frac{d \frac{1}{c_1}}{ds} + \frac{\cos \alpha}{c c_1} + \frac{\cos \alpha_1}{c_1 \gamma_1}. \end{aligned}$$

Supposant maintenant que AX, qui jusqu'ici a été laissé quelconque, devienne successivement la tangente au point A à la courbe AS, à la courbe AS₁, et à la courbe AS₂, on trouve trois identités et les six relations

$$\begin{aligned} \frac{d \frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} &= \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right), & \frac{d \frac{1}{c_2}}{ds_1} &= \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{c_2} \right), \\ \frac{d \frac{1}{\gamma_2}}{ds} &= \frac{1}{c_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\gamma_2} \right), & \frac{d \frac{1}{c}}{ds_2} &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{c} \right), \\ \frac{d \frac{1}{\gamma}}{ds_1} &= \frac{1}{c} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{\gamma} \right), & \frac{d \frac{1}{c_1}}{ds} &= \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{c_1} \right), \end{aligned}$$

qui sont, comme l'on voit, les six premières de M. Lamé.

Pour obtenir les trois dernières, continuons la détermination des cosinus des angles que font avec AX les tangentes aux points P, P₁, P₂ des axes des s, s₁, s₂ relatifs à ces points. Ainsi, cherchons le cosinus de l'angle que la tangente à l'axe des s₁ relatif au point P fait avec AX. Ce cosinus peut se déduire, ou bien de la valeur de $\cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1$ donnée par les formules (c), en supposant que $\cos \alpha_1$, AM_1 , $\cos \alpha_2$, $\cos \alpha$, $\frac{1}{c_1}$, $\frac{1}{\gamma_1}$, ϵ_1 , au lieu de se rapporter au point A, se rapportent à M₂, et deviennent, par conséquent,

$$\cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1, \quad AM_1 + d_{s_1} AM_1, \quad \cos \alpha_2 + d_{s_1} \cos \alpha_2, \quad \cos \alpha + d_{s_1} \cos \alpha, \\ \frac{1}{c_1} + d_{s_1} \frac{1}{c_1}, \quad \frac{1}{\gamma_1} + d_{s_1} \frac{1}{\gamma_1}, \quad \epsilon_1 + d_{s_1} \epsilon_1,$$

ou bien encore de la valeur de $\cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1$, donnée par les mêmes formules (c), en supposant que $\cos \alpha_1$, AM_2 , $\cos \alpha_2$, $\frac{1}{\gamma_2}$, ϵ_2'' , au lieu de se rapporter au point A, se rapportent au point M₁, et deviennent, par conséquent,

$$\cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1, \quad AM_2 + d_{s_1} AM_2, \quad \cos \alpha_2 + d_{s_1} \cos \alpha_2, \quad \frac{1}{\gamma_2} + d_{s_1} \frac{1}{\gamma_2}, \quad \epsilon_2'' + d_{s_1} \epsilon_2''.$$

De la première manière nous trouvons, pour le cosinus en question,

$$\cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1 - (AM_1 + d_{s_1} AM_1) \left\{ \begin{aligned} &(\cos \alpha_2 + d_{s_1} \cos \alpha_2) \left(\frac{1}{c_1} + d_{s_1} \frac{1}{c_1} \right) \\ &+ (\cos \alpha + d_{s_1} \cos \alpha) \left(\frac{1}{\gamma_1} + d_{s_1} \frac{1}{\gamma_1} \right) \end{aligned} \right\} + \epsilon_1 + d_{s_1} \epsilon_1;$$

mais

$$d_{s_1} \cos \alpha_1 = AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2} + \epsilon_2'',$$

$$d_{s_1} \cos \alpha_2 = -AM_2 \left(\frac{\cos \alpha}{c_2} + \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_2} \right) + \epsilon_2,$$

$$d_{s_1} \cos \alpha = AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{c_2} + \epsilon_2',$$

et

$$d_{s_1} AM_1 = AM_1 AM_2 \frac{1}{c_1} + \zeta.$$

Substituant et négligeant les infiniment petits du troisième ordre, il vient

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 + AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2} - AM_1 \frac{\cos \alpha_2}{c_1} - AM_1 \frac{\cos \alpha}{\gamma_1} + AM_1 AM_2 \frac{1}{c_1} \left(\frac{\cos \alpha}{c_2} + \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_2} \right) \\ - AM_1 \cos \alpha_2 d_{s_1} \frac{1}{c_1} - AM_1 AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{c_1} \frac{1}{c_1} - AM_1 AM_2 \frac{1}{\gamma_1} \frac{\cos \alpha_2}{c_1} \\ - AM_1 \cos \alpha d_{s_1} \frac{1}{\gamma_1} - AM_1 AM_2 \frac{\cos \alpha}{\gamma_1} \frac{1}{c_1} + \epsilon'_2 + \epsilon_1. \end{aligned}$$

Si nous le calculons de la seconde manière, nous trouvons d'abord

$$\cos \alpha_1 + d_{s_1} \cos \alpha_1 + (AM_2 + d_{s_1} AM_2) (\cos \alpha_2 + d_{s_1} \cos \alpha_2) \left(\frac{1}{\gamma_2} + d_{s_1} \frac{1}{\gamma_2} \right) + \epsilon'_2 + d_{s_1} \epsilon'_2;$$

mais

$$d_{s_1} \cos \alpha_1 = -AM_1 \left(\frac{\cos \alpha_2}{c_1} + \frac{\cos \alpha}{\gamma_1} \right) + \epsilon_1,$$

$$d_{s_1} \cos \alpha_2 = AM_1 \frac{\cos \alpha_1}{c_1} + \epsilon'_1,$$

$$d_{s_1} AM_2 = AM_1 AM_2 \frac{1}{\gamma_2} + \zeta'.$$

Substituant et négligeant les infiniment petits du troisième ordre, il vient

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 - AM_1 \frac{\cos \alpha_2}{c_1} - AM_1 \frac{\cos \alpha}{\gamma_1} + AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2} + AM_1 AM_2 \frac{\cos \alpha_1}{c_1} \frac{1}{\gamma_2} \\ + AM_2 \cos \alpha_2 d_{s_1} \frac{1}{\gamma_2} + AM_1 AM_2 \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2} \frac{1}{\gamma_2} + \epsilon_1 + \epsilon'_2; \end{aligned}$$

égalant cette valeur à celle que nous avons obtenue précédemment, faisant $AM_1 = AM_2$, et remarquant que

$$\frac{ds_2 \frac{1}{c_1}}{AM_2} = \frac{d \frac{1}{c_1}}{ds_1},$$

$$\frac{ds_2 \frac{1}{\gamma_1}}{AM_2} = \frac{d \frac{1}{\gamma_1}}{ds_1},$$

$$\frac{ds_1 \frac{1}{\gamma_2}}{AM_1} = \frac{d \frac{1}{\gamma_2}}{ds_1},$$

il vient

$$\frac{\cos \alpha}{c_1 c_2} - \cos \alpha_2 \frac{d \frac{1}{c_1}}{ds_2} - \frac{\cos \alpha_2}{c_1^2} - \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1 c_2} - \cos \alpha \frac{d \frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} - \frac{\cos \alpha}{c_1 \gamma_1} = \cos \alpha_2 \frac{d \frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} + \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2^2}.$$

On trouverait aussi, en cherchant l'angle que fait avec AX la tangente au point P, l'axe des s_2 relatif à ce point,

$$\frac{\cos \alpha}{\gamma_1 \gamma_2} - \cos \alpha_1 \frac{d \frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} - \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1^2} - \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1 c_2} - \cos \alpha \frac{d \frac{1}{c_2}}{ds_1} - \frac{\cos \alpha}{c_2 \gamma_2} = \cos \alpha_1 \frac{d \frac{1}{c_1}}{ds_2} + \frac{\cos \alpha_1}{c_1^2};$$

et de même, en cherchant les angles que font avec AX les tangentes au point P, des axes des s_2 et des s relatifs à ce point, et les tangentes au point P, des axes des s et des s_1 relatifs à ce point,

$$\frac{\cos \alpha_1}{c_1 c} - \cos \alpha \frac{d \frac{1}{c_2}}{ds} - \frac{\cos \alpha}{c_1^2} - \frac{\cos \alpha}{\gamma_2 c} - \cos \alpha_1 \frac{d \frac{1}{\gamma_2}}{ds} - \frac{\cos \alpha_1}{c_2 \gamma_2} = \cos \alpha \frac{d \frac{1}{\gamma}}{ds_2} + \frac{\cos \alpha}{\gamma^2},$$

$$\frac{\cos \alpha_1}{\gamma \gamma_2} - \cos \alpha_2 \frac{d \frac{1}{\gamma}}{ds_2} - \frac{\cos \alpha_2}{\gamma^2} - \frac{\cos \alpha_2}{\gamma_2 c} - \cos \alpha_1 \frac{d \frac{1}{c}}{ds_2} - \frac{\cos \alpha_1}{c \gamma} = \cos \alpha_2 \frac{d \frac{1}{c_2}}{ds} + \frac{\cos \alpha_2}{c_2^2},$$

$$\frac{\cos \alpha_2}{c c_1} - \cos \alpha_1 \frac{d \frac{1}{c}}{ds_1} - \frac{\cos \alpha_1}{c^2} - \frac{\cos \alpha_1}{\gamma c_1} - \cos \alpha_2 \frac{d \frac{1}{\gamma}}{ds_1} - \frac{\cos \alpha_2}{c \gamma} = \cos \alpha_1 \frac{d \frac{1}{\gamma_1}}{ds} + \frac{\cos \alpha_1}{\gamma_1^2},$$

$$\frac{\cos \alpha_2}{\gamma_1 \gamma} - \cos \alpha \frac{d \frac{1}{\gamma_1}}{ds} - \frac{\cos \alpha}{\gamma_1^2} - \frac{\cos \alpha}{\gamma c_1} - \cos \alpha_2 \frac{d \frac{1}{c_1}}{ds} - \frac{\cos \alpha_2}{c_1 \gamma_1} = \cos \alpha \frac{d \frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{\cos \alpha}{c^2}.$$

Supposant maintenant que AX, qui jusqu'ici a été laissé quelconque, devienne successivement la tangente au point A à l'axe des s , des s_1 et des s_2 relatifs à ce point, on trouvera d'abord six identités, et puis les neuf formules

$$\begin{aligned} \frac{d \frac{1}{c}}{ds_2} &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{c} \right), & \frac{d \frac{1}{\gamma}}{ds_1} &= \frac{1}{c} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{\gamma} \right), \\ \frac{d \frac{1}{c_1}}{ds} &= \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{c_1} \right), & \frac{d \frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} &= \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right), \\ \frac{d \frac{1}{c_2}}{ds_1} &= \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{c_2} \right), & \frac{d \frac{1}{\gamma_2}}{ds} &= \frac{1}{c_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\gamma_2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{d \frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{d \frac{1}{\gamma_1}}{ds} = -\frac{1}{c_2} - \frac{1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\gamma_1 c_1},$$

$$\frac{d \frac{1}{c_1}}{ds_2} + \frac{d \frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\gamma_2^2} - \frac{1}{\gamma_1 c_2},$$

$$\frac{d \frac{1}{c_2}}{ds} + \frac{d \frac{1}{\gamma}}{ds_2} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_2 c},$$

qui ne sont autres que celles de M. Lamé. On peut remarquer pourtant qu'il y a une différence quant aux signes des termes du second membre. Cela tient à ce que, dans les formules de M. Lamé, les rayons de courbure sont regardés comme positifs quand leur direction est celle des normales extérieures, c'est-à-dire celle des accroissements indiqués par ds , ds_1 , ds_2 , tandis que nous avons fait ici l'hypothèse contraire.

§ III. — *Propriétés générales des lignes tracées sur les surfaces.*

24. Considérons sur une surface une ligne quelconque MAN (*fig. 9*); menons-lui par un de ses points A une normale dont le premier élément $AA_1 = \delta\sigma$ soit situé sur la surface. Si x, y, z représentent les coordonnées du point A, x_1, y_1, z_1 celles du point A_1 , et dx, dy, dz les accroissements infiniment petits que reçoivent les coordonnées x, y, z quand on passe du point A à un point B infiniment voisin et situé sur MAN, nous aurons

$$(1) \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \delta\sigma^2,$$

$$(2) \quad (x - x_1) dx + (y - y_1) dy + (z - z_1) dz = 0.$$

Nous employons, comme on peut le voir déjà, et nous avertissons que cette notation sera conservée dans tout ce paragraphe, la caractéristique d pour représenter les différentielles qui se rapportent à un déplacement infiniment petit effectué sur la courbe MAN, dans le sens suivant lequel se comptent les arcs positifs de cette courbe, et la caractéristique δ pour représenter les différentielles qui se rapportent à un déplacement perpendiculaire à MAN, dans le sens suivant lequel se comptent les arcs positifs des trajectoires orthogonales de cette courbe; le sens de ces deux déplacements étant tel

d'ailleurs, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, qu'en adjoignant à leur direction celle de la normale extérieure à la surface au point A, on ait trois droites rectangulaires situées par rapport à ce point, comme le sont respectivement, par rapport à leur origine, les axes des x , des y et des z : ce qui, du reste, laisse les deux premières directions complètement indéterminées, puisqu'on peut choisir arbitrairement la région extérieure à la surface.

Différentions, suivant la caractéristique d , les deux membres de l'égalité (1); il viendra, à cause de l'équation (2),

$$(3) \quad (x - x_1) dx_1 + (y - y_1) dy_1 + (z - z_1) dz_1 = -\delta\sigma d\delta\sigma.$$

25. Si $\delta\sigma$ est supposé constant pour tous les points de MAN, on aura

$$d\delta\sigma = 0,$$

et l'égalité précédente se réduira à

$$(4) \quad (x - x_1) dx_1 + (y - y_1) dy_1 + (z - z_1) dz_1 = 0;$$

ce qui montre que la courbe M, A, N, qui passe par les extrémités des droites infiniment petites MM₁, AA₁, NN₁,..., menées sur la surface normalement à MAN et prises égales entre elles, est normale à ces droites MM₁, AA₁, NN₁,....

De là nous pouvons conclure un théorème remarquable dû à M. Gauss.

26. Concevons que d'un point A (fig. 10) pris sur une surface on mène sur cette surface une série de lignes AM, AM', AM'',... dont tous les plans osculateurs soient normaux à la surface, de manière qu'en prenant deux points quelconques N et N₁ suffisamment rapprochés sur une de ces lignes, la portion de cette ligne comprise entre N et N₁ soit le plus court chemin de N à N₁ sur la surface; si l'on mesure à partir du point A, sur toutes les lignes AM, AM', AM'',..., des longueurs finies égales, la courbe qui passera par les extrémités M, M', M'',... de ces longueurs sera normale aux lignes AM, AM', AM'',... en ces points.

En effet, prenons à partir du point A, sur toutes les lignes AM, AM', AM'',..., des longueurs infiniment petites égales, Am, Am', Am'',... puis à partir des points m, m', m'',..., d'autres longueurs infiniment petites et

égales $mm_1, m'm'_1, m''m''_1, \dots$, et, ainsi de suite, jusqu'à ce que nous soyons arrivés en M, M', M'', \dots . La courbe qui passera par les points m, m', m'', \dots sera une circonférence de cercle; par conséquent, sera normale aux éléments Am, Am', Am'', \dots ; mais ces éléments et les éléments correspondants qui suivent, savoir, $mm_1, m'm'_1, m''m''_1, \dots$, déterminent respectivement des plans osculateurs des courbes AM, AM', AM'', \dots . D'ailleurs tous les plans osculateurs de ces courbes sont normaux à la surface; cela exige évidemment que la circonférence qui passe par les points m, m', m'', \dots soit normale aux éléments $mm_1, m'm'_1, m''m''_1, \dots$. Il résulte de là, et de ce que nous avons démontré (n° 25), que la courbe qui passe par les points m_1, m'_1, m''_1, \dots est aussi normale aux éléments $mm_1, m'm'_1, m''m''_1, \dots$; par conséquent, en vertu de la propriété des plans osculateurs des courbes AM, AM', AM'', \dots , qu'elle est normale aux éléments suivants $m_1m_2, m'_1m'_2, m''_1m''_2, \dots$: d'où nous concluons de même que ces derniers éléments sont normaux à la courbe qui passe par les points m_2, m'_2, m''_2, \dots , et ainsi de suite. Il est clair qu'en continuant ce raisonnement, on finira par démontrer que la courbe qui passe par les points M, M', M'', \dots est normale aux derniers éléments des courbes AM, AM', AM'', \dots .

27. La démonstration précédente pourrait évidemment servir à établir un théorème plus général, dû aussi à M. Gauss, et qui s'énonce ainsi: *Si, sur une surface, on conçoit une courbe quelconque, et que des différents points de cette courbe l'on mène à angle droit une série de lignes géodésiques ou minima, de même longueur, la courbe qui joindra les extrémités de ces lignes coupera chacune d'elles à angle droit.*

Ces deux théorèmes nous seront plus tard d'une grande utilité.

28. Divisons l'équation (2) du n° 24 par la différentielle ds de l'arc de la courbe MAN , et différencions le résultat suivant la caractéristique d ; il viendra

$$ds - \frac{dx}{ds} dx_1 - \frac{dy}{ds} dy_1 - \frac{dz}{ds} dz_1 + (x - x_1) d \frac{dx}{ds} + (y - y_1) d \frac{dy}{ds} + (z - z_1) d \frac{dz}{ds} = 0,$$

que l'on peut, en posant

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = ds_1^2,$$

mettre sous la forme

$$(5) \quad 1 - \frac{ds_1}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dx_1}{ds_1} + \frac{dy}{ds} \frac{dy_1}{ds_1} + \frac{dz}{ds} \frac{dz_1}{ds_1} \right) + (x - x_1) \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} + (y - y_1) \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} + (z - z_1) \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} = 0.$$

Or, ρ étant le rayon de courbure de la courbe MAN au point A, et α, β, γ les angles que ce rayon de courbure prolongé de la courbe vers le centre de courbure fait avec les parties positives des axes, on sait que

$$\cos \alpha = \rho \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos \beta = \rho \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \cos \gamma = \rho \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds}.$$

De même λ, μ, ν étant les angles que la normale AA₁ prolongée de la courbe MAN vers la courbe M₁A₁N₁, fait avec les parties positives des axes, on a

$$\cos \lambda = - \frac{x - x_1}{\delta \sigma}, \quad \cos \mu = - \frac{y - y_1}{\delta \sigma}, \quad \cos \nu = - \frac{z - z_1}{\delta \sigma};$$

l'équation (5) revient donc à

$$1 - \frac{\delta \sigma}{\rho} (\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu) = \frac{ds_1}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dx_1}{ds_1} + \frac{dy}{ds} \frac{dy_1}{ds_1} + \frac{dz}{ds} \frac{dz_1}{ds_1} \right),$$

ou simplement à

$$(6) \quad 1 - \delta \sigma \frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{ds_1}{ds} \cos \varphi,$$

en représentant par θ l'angle que la normale principale de MAN au point A, prolongée de la courbe vers le centre de courbure, fait avec la normale AA₁, prolongée de A en A₁, et par φ l'angle que la tangente en A à la courbe MAN, prolongée dans le sens suivant lequel sont comptés les arcs positifs de cette courbe, fait avec la tangente en A₁ à la courbe M₁A₁N₁, prolongée aussi dans le sens suivant lequel sont comptés les arcs positifs de cette nouvelle courbe.

29. On peut remarquer que, dans la démonstration que nous venons de donner, nous n'avons aucunement supposé $\delta \sigma$ infiniment petit. Ainsi, la formule précédente subsiste dans le cas même où $\delta \sigma$ est une longueur finie tout à fait quelconque; quand $\delta \sigma$ est infiniment petit comme dans la *fig.* 9, la formule se simplifie : on peut, en effet, substituer l'unité à $\cos \varphi$, car φ

est alors infiniment petit, et l'on a

$$(7) \quad 1 - \delta\sigma \frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{ds_1}{ds}.$$

Du reste, si l'on ne se propose que d'obtenir cette dernière formule qui joue un grand rôle dans la théorie des lignes tracées sur une même surface, on peut procéder plus simplement comme il suit.

29 bis. On a, d'après nos notations,

$$\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z = 0,$$

et

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

Différentiant la première équation suivant la caractéristique d , et la seconde suivant δ , il vient

$$\begin{aligned} \delta x d \frac{dx}{ds} + \delta y d \frac{dy}{ds} + \delta z d \frac{dz}{ds} + \frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z &= 0, \\ dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz &= ds\delta ds; \end{aligned}$$

d'où, en remarquant que

$$d\delta x = \delta dx, \quad d\delta y = \delta dy, \quad d\delta z = \delta dz,$$

on tire

$$\delta ds = -\delta x d \frac{dx}{ds} - \delta y d \frac{dy}{ds} - \delta z d \frac{dz}{ds}.$$

Mais λ, μ, ν représentant, comme plus haut, les angles que la normale à MAN tracée sur la surface, et prolongée du côté de la courbe M, A, N , fait avec les parties positives des axes des coordonnées, α, β, γ ceux que la normale principale fait avec les mêmes parties des axes, et ρ le rayon de courbure de la courbe MAN, on a

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{\partial x}{\partial \sigma}, \quad \cos \mu = \frac{\partial y}{\partial \sigma}, \quad \cos \nu = \frac{\partial z}{\partial \sigma}, \\ \cos \alpha &= \rho \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos \beta = \rho \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \cos \gamma = \rho \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds}. \end{aligned}$$

Donc, substituant dans la valeur de δds les valeurs de $\delta x, \delta y, \delta z, d \frac{dx}{ds}$,

$d \frac{dy}{ds}$, $d \frac{dz}{ds}$ tirées de ces dernières équations, il vient

$$\delta ds = - \frac{\partial \sigma ds}{\rho} (\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu),$$

ou bien

$$(7 \text{ bis}) \quad \delta ds = - \delta \sigma ds \frac{\cos \theta}{\rho},$$

θ étant l'angle que le plan osculateur de la courbe au point A fait avec le plan tangent de la surface au même point, ou mieux, pour faire disparaître toute ambiguïté, l'angle que la normale principale de la courbe dirigée de la courbe vers le centre de courbure fait avec la normale à cette courbe, tracée sur la surface et dirigée dans le sens suivant lequel se comptent les accroissements indiqués par la caractéristique δ . Cette formule coïncide au fond avec celle que l'on a déjà obtenue.

30. On peut déduire de la formule (7) un grand nombre de résultats importants. Elle va nous servir, en premier lieu, à établir une équation remarquable des lignes géodésiques tracées sur une surface quelconque.

Imaginons que la surface considérée soit découpée en rectangles infiniment petits par deux systèmes de lignes orthogonales, et regardons ces lignes comme destinées à fixer la position des points situés sur la surface par les longueurs de leurs arcs x et y comptés à partir de deux de ces courbes prises pour axes, et dans un certain sens que l'on supposera déterminé, comme au n° 24, au moyen de la normale extérieure. Soient maintenant AA' (*fig. 11*) une courbe quelconque tracée sur la surface, et mn un de ses éléments; si nous appelons dx et dy les éléments mp et np des lignes coordonnées, on aura

$$mn = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

et, par suite, la longueur totale AA' de la courbe sera

$$(a) \quad \int \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

l'intégrale s'étendant de la première extrémité A à la seconde A'.

Prenons la variation en supposant que les points correspondants dans les deux états soient situés sur les lignes coordonnées du même système que tm ; il viendra, en indiquant par δ ce genre d'accroissement dont le

sens positif sera d'ailleurs celui suivant lequel croissent les arcs y ,

$$\int \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy.$$

Or

$$\delta dx = m'p' - mp = -mp \cdot mm' \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x = -dx \cdot \omega \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x,$$

en posant $mm' = \omega$, et appelant $\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x$ le rapport que l'on obtient en divisant par le rayon de courbure de la ligne coordonnée $rm p$ au point m le cosinus de l'angle que la normale principale de cette courbe, dirigée de la courbe vers le centre de courbure, fait avec la tangente à la courbe coordonnée tmm' menée dans le sens suivant lequel se comptent les arcs positifs de cette courbe; tangente qui est ici placée par rapport à la tangente analogue à la courbe $rm p$ et à la normale extérieure à la surface, comme l'axe des y l'est par rapport à celui des x et à celui des z . Quant à δdy , il est égal à

$$n'p' - np = \omega + \frac{d\omega}{ds} ds - pp'.$$

Or

$$\omega - pp' = mm' - p'p = -\omega dx \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_y;$$

donc

$$\delta dy = -\omega dx \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_y + \frac{d\omega}{ds} ds.$$

On appelle $\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_y$ le rapport que l'on obtient en divisant par le rayon de courbure de la ligne coordonnée tmm' le cosinus de l'angle que la normale principale de cette courbe, dirigée de la courbe vers le centre de courbure, fait avec la normale tracée sur la surface et située par rapport à mm' et à la normale extérieure à la surface, comme l'axe des y l'est par rapport à celui des x et à celui des z , c'est-à-dire ici avec la tangente à la ligne coordonnée $rm p$ menée dans un sens contraire à celui suivant lequel se comptent les arcs positifs de cette courbe. Substituant dans la variation de l'intégrale (a), il vient

$$\int \left[-\frac{dx}{ds} \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x dx - \frac{dy}{ds} \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_y dx \right] \omega + \frac{dy}{ds} \frac{d\omega}{ds} ds.$$

Intégrant par parties le terme qui contient $\frac{d\omega}{ds}$, et négligeant ce qui se rap-

porte aux limites, parce qu'on suppose fixes les extrémités de la courbe, on a

$$\int \omega \left[-\frac{dy}{ds} \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_r dx - \frac{dx}{ds} \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x dx - d \frac{dy}{ds} \right],$$

ou bien encore

$$\int \omega ds \left[-\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_r \sin i - \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x \cos i - \frac{di}{ds} \right] \cos i,$$

en appelant i l'angle positif (c'est-à-dire compté en allant de mp vers mm') que forme la tangente à la courbe $rm p$ au point m , et dirigée suivant mp , avec la tangente à la courbe $rm p$ menée dans le sens, arbitraire d'ailleurs, suivant lequel se comptent les arcs positifs de cette courbe; ce qui donne

$$\frac{dx}{ds} = \cos i, \quad \frac{dy}{ds} = \sin i, \quad d \frac{dy}{ds} = \cos i di.$$

De là on tire, pour l'équation de la ligne géodésique, en égalant à zéro l'élément de l'intégrale,

$$(8) \quad \frac{di}{ds} = -\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x \cos i - \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_r \sin i.$$

31. Pour montrer immédiatement l'utilité que l'on peut retirer de cette formule, nous allons en déduire l'équation remarquable que M. Liouville a donnée des lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

Prenons pour lignes coordonnées tracées sur l'ellipsoïde les lignes de courbure qui, comme l'on sait, sont les intersections de l'ellipsoïde avec les différents hyperboloïdes à une et à deux nappes qui ont mêmes foyers que lui; dans ce cas, il est facile d'évaluer $\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x$ et $\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_r$: il suffit de se rappeler notre formule (7), et quelques formules de la théorie, maintenant bien connue, des coordonnées elliptiques sur l'ellipsoïde.

Nous obtiendrons ainsi facilement, en adoptant les notations de M. Liouville, et supposant que la ligne de courbure représentée par l'équation $\mu = \text{const.}$ corresponde à la ligne coordonnée dont les arcs ont été appelés x ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x &= \frac{-\mu \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} (\mu^2 - \nu)^{\frac{3}{2}}}, \\ \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_r &= \frac{-\nu \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \nu^2} (\mu^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Substituant dans l'équation (8), il vient

$$\frac{di}{ds} = \frac{\mu \cos i \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} (\mu^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\nu \sin i \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \nu^2} (\mu^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où chassant ds , et observant que

$$dx = \cos i ds = \frac{\sqrt{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}} d\nu,$$

$$dy = \sin i ds = \frac{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} d\mu,$$

il vient

$$di = \frac{\mu \cos i d\mu}{\sin i (\mu^2 - \nu^2)} + \frac{\nu \sin i d\nu}{\cos i (\mu^2 - \nu^2)},$$

ou

$$(\nu^2 - \mu^2) \sin i \cos i di + \mu \cos^2 i d\mu + \nu \sin^2 i d\nu = 0,$$

ou intégrant,

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \text{const.};$$

ce qui est la formule de M. Liouville.

MM. Chasles et Liouville ont donné des démonstrations géométriques très-simples de cette formule; je pense néanmoins que la démonstration précédente, qui est basée sur le calcul des variations, ne sera pas sans quelque intérêt.

32. On connaît les conséquences élégantes que M. Michael Roberts a déduites de la formule de M. Liouville, et desquelles résulte qu'il existe une grande analogie entre les lignes de courbure de l'ellipsoïde et les ellipses planes; je joindrai aux résultats connus une propriété d'un autre genre qui fournira une nouvelle preuve de l'analogie en question.

Reprenons la valeur générale

$$\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x = \frac{\mu \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} (\mu^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}}$$

du rapport du cosinus de l'angle que le plan osculateur de la ligne de courbure de l'ellipsoïde qui a pour équation $\mu = \text{const.}$, fait avec le plan tangent à cette surface, au rayon de courbure de cette ligne. Si nous considérons en même temps une ligne géodésique issue d'un ombilic, et dont

l'équation sera, d'après MM. Liouville et Roberts,

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = b^2,$$

nous pourrions aisément calculer le sinus de l'angle que cette ligne minimum fait avec la courbe $\mu = \text{const.}$, ou, ce qui revient au même, le cosinus de l'angle α que la ligne minimum fait avec la normale menée sur la surface, à la courbe $\mu = \text{const.}$, et l'on trouvera

$$\cos^2 \alpha = \frac{\mu^2 - b^2}{\mu^2 - \nu^2},$$

d'où

$$\cos^3 \alpha = \frac{(\mu^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{(\mu^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

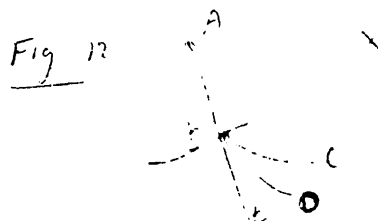
Cette valeur, combinée avec celle de $\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x$, donne

$$\frac{\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x}{\cos^3 \alpha} = \frac{-\mu \sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} (\mu^2 - b^2)};$$

ce qui nous prouve, le second membre ne contenant que μ , et étant, par conséquent, le même pour tous les points de la courbe $\mu = \text{const.}$, que le rapport $\frac{\cos \theta}{\rho}$, relatif à une ligne de courbure quelconque de l'ellipsoïde, est proportionnel au cube du cosinus de l'angle, que la normale menée sur la surface à cette ligne, fait avec la ligne géodésique issue d'un ombilic; propriété analogue à celle qui apprend que dans l'ellipse le produit du rayon de courbure par le cube du cosinus de l'angle que le rayon vecteur issu du foyer fait avec la normale, a la même valeur quel que soit le point de l'ellipse que l'on considère.

33. De la formule (8) établie dans le numéro précédent, et qui fait connaître la variation de l'inclinaison des lignes géodésiques sur ce que nous avons appelé plus haut les lignes coordonnées, on peut facilement déduire une formule plus générale, et faisant connaître la variation de l'inclinaison d'une ligne tout à fait quelconque sur les lignes coordonnées.

Soient AB, BC deux éléments consécutifs de la ligne considérée (*fig. 12*), et BD le second élément de la ligne géodésique dirigée suivant AB; prolon-



geons AB jusqu'à E : le trièdre formé par BC, BD, BE, dans lequel les deux faces EBD et DBC sont évidemment perpendiculaires l'une à l'autre, nous donnera

$$CBD = CBE \sin \widehat{CBE, DBE}.$$

Or représentons par α l'angle des deux plans ABC et ABD, ou mieux, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, l'angle plus petit que 180 degrés, des normales principales des deux courbes ABC, ABD, prolongées l'une et l'autre de la courbe à laquelle elles se rapportent vers le centre de courbure correspondant; appelons en outre ds l'élément AB de la courbe considérée, et enfin ρ le rayon de courbure de cette courbe au point A ou au point B : on aura

$$CBE = \frac{ds}{\rho};$$

donc

$$(a) \quad CBD = ds \frac{\sin \alpha}{\rho} = \pm ds \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

Nous appelons θ l'angle que le plan osculateur de la courbe ABC au point B fait avec le plan tangent de la surface au même point, ou mieux, pour faire disparaître toute ambiguïté, l'angle que la normale principale de la courbe ABC, prolongée de cette courbe vers le centre de courbure, fait avec une normale à ABC tracée sur la surface et située par rapport à la normale extérieure à la surface et à la tangente à ABC prolongée dans le sens suivant lequel se comptent les arcs positifs de cette courbe, comme l'axe des y , par rapport à celui des z et à celui des x . Quant au signe placé devant le second membre de l'égalité (a), on reconnaît aisément qu'il doit être + quand l'angle positif que forment les tangentes considérées plus haut à la courbe ABC et à la courbe coordonnée (x) est plus grand que l'angle positif que forment les tangentes à la ligne géodésique ABD et à la courbe coordonnée (x), et qu'il est — dans le cas contraire.

Pour avoir maintenant la variation de l'inclinaison de la ligne ABC sur une des lignes coordonnées, il est clair qu'il suffit d'ajouter à l'angle CBD, ou plutôt à $ds \frac{\cos \theta}{\rho}$, la variation de l'inclinaison de la ligne minimum dirigée suivant AB que nous avons obtenue dans le numéro précédent; il vient

ainsi

$$(9) \quad di = -dx \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x - dy \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_y + ds \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_s,$$

en remplaçant par $\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_s$ le rapport $\frac{\cos \theta}{\rho}$ défini plus haut, afin d'exprimer qu'il se rapporte à la courbe proposée qui est supposée tout à fait quelconque.

Cette dernière formule représente une généralisation remarquable de celle qui, dans la théorie des lignes planes, donne la valeur de l'angle de contingence en fonction du rayon de courbure; nous pouvons la vérifier dans un cas particulier bien simple.

Supposons la ligne ABC tracée sur un plan, et admettons que les lignes des coordonnées deviennent, d'une part, des droites issues d'un même point, et d'une autre, des circonférences décrites du même point comme centre, ce qui nous fournira le système de coordonnées polaires ordinaires. Représentons comme à l'ordinaire par r et θ ces coordonnées polaires; si, de plus, ρ est le rayon de courbure de la courbe, la formule (9) deviendra

$$d \cdot \text{arc tang } \frac{r'}{r} = -d\omega + \frac{1}{\rho} ds,$$

r' étant la dérivée de r par rapport à ω , ou

$$\frac{1}{\rho} ds = d\omega \left(1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} \right) = d\omega \left(\frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} \right),$$

r'' étant la seconde dérivée de r par rapport à ω ; d'où

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui est le résultat connu.

34. La formule (9), et plusieurs autres établies plus haut, tout en nous montrant l'importance de la considération du rapport que l'on a appelé $\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_s$ et qui a été nettement défini dans le numéro précédent, nous font voir que c'est là l'élément qui doit représenter la courbure des lignes, lorsque du moins on considère ces lignes comme tracées sur une surface déterminée. Pour abrégé, nous donnerons, dans ce qui va suivre, à ce rapport le nom

de courbure géodésique; cette dénomination est motivée sur une propriété exprimée par la formule (a) du numéro précédent, et d'après laquelle la courbure géodésique d'une courbe quelconque est égale en valeur absolue à l'angle infiniment petit que forment deux lignes géodésiques menées tangentielllement à la courbe considérée par deux points infiniment voisins A et B, divisé par l'arc AB.

35. La formule (7), qui nous a déjà servi à établir une équation remarquable des lignes géodésiques tracées sur une surface quelconque, peut encore être employée d'une autre manière dans les questions dépendant du calcul des variations, et relatives aux lignes tracées sur les surfaces. Montrons-le par un exemple simple.

Proposons-nous de trouver la ligne de longueur donnée qui comprend une aire maximum sur une surface.

Supposons que la courbe cherchée passe par les points fixes A et B (*fig. 13*), et que ce soit l'aire comprise entre cette courbe, que nous nommerons AMB, et la courbe fixe ACB, qui soit un maximum. Considérons une seconde courbe AM₁B passant par A et B, infiniment voisine de AMB et ayant même longueur que cette dernière courbe; non-seulement la différence de longueur de AMB et AM₁B sera nulle, mais encore l'aire comprise entre ces deux courbes. Or, par un point quelconque M de AMB, menons une normale à cette courbe dont le premier élément MM₁ soit sur la surface. Soit ω la longueur de l'élément MM₁, pris avec le signe +, s'il est d'un côté de AMB, et avec le signe —, s'il est de l'autre côté, ω étant par conséquent variable avec le point M, ou fonction de l'arc AM que j'appelle s ; l'aire comprise entre les deux courbes AMB et AM₁B sera

$$\int_0^{s_1} \omega ds,$$

s_1 étant la longueur de la courbe AMB : on aura donc

$$(a) \quad \int_0^{s_1} \omega ds = 0.$$

D'un autre côté, si nous représentons par $MN = ds$ un élément de la courbe AMB, et par $M_1N_1 = ds$, l'élément de la courbe AM₁B déterminé

en menant des normales sur la surface à la courbe AMB par les points M et N, on pourra appliquer la formule (7) aux deux courbes AMB et AM'B, et l'on aura

$$ds_1 - ds = \pm \frac{\omega \cos \theta}{\rho} ds,$$

$\frac{\cos \theta}{\rho}$ se rapportant à la courbe AMB, et le signe du second membre dépendant de celui de ω .

Par conséquent, on aura

$$(b) \quad \int_0^{s_1} \omega \frac{\cos \theta}{\rho} ds = 0,$$

Il est très-facile maintenant, en appliquant le raisonnement connu, de déterminer l'équation de la courbe cherchée. En effet, posons avec M. Cauchy,

$$\int_0^s \omega ds = \varphi(s),$$

$\varphi(s)$ s'annulant pour $s = 0$ et $s = s_1$; on aura

$$\omega = \varphi'(s),$$

et l'équation (b) deviendra

$$\int_0^{s_1} \varphi'(s) \frac{\cos \theta}{\rho} ds = 0.$$

Intégrant par parties, et appelant $\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)'$ la dérivée par rapport à s de $\frac{\cos \theta}{\rho}$, il vient

$$\int_0^{s_1} \varphi(s) \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)' ds = 0,$$

d'où l'on tire, $\varphi(s)$ étant tout à fait quelconque entre 0 et s_1 ,

$$\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)' = 0,$$

d'où

$$\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right) = \text{const.}$$

Ainsi, la courbe de longueur donnée qui comprend une aire maximum sur une surface a son rayon de courbure en chaque point proportionnel au

cosinus de l'angle que son plan osculateur fait avec le plan tangent de la surface au même point; en d'autres termes, son rayon de courbure géodésique est constant.

Ce théorème remarquable, qui est le correspondant de celui qui apprend que dans le cercle le rayon de courbure est constant, n'est pas nouveau. Il a été donné depuis bien longtemps dans les premiers volumes du Journal de M. Crelle; M. Delaunay y est aussi parvenu dans ces derniers temps, dans une Note insérée dans le journal de M. Liouville.

36. Nous allons terminer les applications de la formule (7), en cherchant la condition pour que deux systèmes de lignes orthogonales tracées sur une même surface puissent découper cette surface en carrés.

Considérons sur la surface une suite de lignes infiniment rapprochées de l'un et de l'autre système; ces lignes détermineront, en se coupant, des rectangles infiniment petits (*fig.* 14). Supposons que les rectangles a , b , c soient des carrés, et exprimons qu'il en est de même de d . Si nous appelons $\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x$ la courbure géodésique de la ligne $AA'A''\dots$, et $\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_y$ la courbure géodésique de $AA_1A_2\dots$, en supposant d'ailleurs, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, le sens dans lequel croissent les arcs positifs de ces courbes, déterminé comme au n° 30, nous aurons d'abord

$$A_1A'_1 = AA' - AA' \cdot AA_1 \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x + \varepsilon \right] = AA' - \overline{AA'}^2 \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x + \varepsilon \right],$$

ε étant infiniment petit du même ordre que AA' ; et de même

$$A'A'_1 = AA_1 + AA_1 \cdot AA' \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_y + \zeta \right] = AA' + \overline{AA'}^2 \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_y + \zeta \right],$$

ζ étant aussi infiniment petit du même ordre que AA' .

Puis on trouvera semblablement

$$A'_1A''_1 = A'A'' - \overline{A'A''}^2 \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x + \frac{d \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_x}{dx} AA' + \varepsilon + \varepsilon_1 \right],$$

$$A'_1A'_2 = A_1A_2 + \overline{A_1A_2}^2 \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_y + \frac{d \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)_y}{dy} AA_1 + \zeta + \zeta_1 \right],$$

$\frac{d\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x}{dx}$ et $\frac{d\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_y}{dy}$ représentant respectivement la dérivée de $\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x$ relative à un déplacement effectué suivant $AA'A''$, et la dérivée de $\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_y$ relative à un déplacement effectué suivant $AA_1A_2\dots$, et ϵ , et ζ , étant des infiniment petits du second ordre, en prenant AA' pour unité d'infiniment petits. Si nous voulons maintenant que le rectangle d soit un carré, il faudra que

$$\begin{aligned} A'A'' - \overline{A'A''}^2 & \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x + \frac{d\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x}{dx} AA' + \epsilon + \epsilon_1 \right] \\ &= A_1A_2 + \overline{A_1A_2}^2 \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_y + \frac{d\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_y}{dy} AA_1 + \zeta + \zeta_1 \right], \end{aligned}$$

d'où, substituant à $A'A''$ et A_1A_2 , qui sont respectivement égaux à $A'A'_1$, $A_1A'_1$, leurs valeurs écrites plus haut, et négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième,

$$\begin{aligned} AA' + \overline{AA'}^2 & \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_y + \zeta \right] - \left[\overline{AA'}^2 + 2\overline{AA'}^3 \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_y \right] \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x \\ & - \overline{AA'}^2 \left[\frac{d\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x}{dx} AA' + \epsilon \right] = AA' - \overline{AA'}^2 \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x + \epsilon \right] \\ & + \left[\overline{AA'}^2 - 2\overline{AA'}^3 \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x \right] \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_y + \overline{AA'}^2 \left[\frac{d\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_y}{dy} AA' + \zeta \right], \end{aligned}$$

ou, réduisant,

$$\frac{d\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x}{dx} + \frac{d\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_y}{dy} = 0.$$

Ainsi, la condition cherchée est que les *variations que reçoivent les courbures géodésiques des deux courbes $AA'A''\dots$, $AA_1A_2\dots$, pour des déplacements infiniment petits et égaux effectués sur ces courbes dans le sens suivant lequel se comptent leurs arcs positifs, soient égales et de signes contraires.*

37. Si les courbes considérées sont tracées sur un plan, la condition

devient

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)_x}{dx} + \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)_y}{dy} = 0.$$

Or on sait que la condition pour que deux systèmes de lignes orthogonales planes puissent partager leur plan commun en carrés infiniment petits est, d'après un théorème de M. Bertrand, la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux systèmes de lignes soient isothermes. Donc on peut dire aussi que la condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes de lignes orthogonales planes soient isothermes est que les variations des courbures de ces courbes, pour des déplacements égaux effectués sur ces courbes, soient égaux, abstraction faite de leurs signes, pour chacun de leurs points de rencontre.

On déduit de là cette propriété assez curieuse, que si les courbes de l'un des systèmes sont des cercles ou des droites, celles du système orthogonal devront nécessairement être aussi des cercles ou des droites, pour que ces deux systèmes soient isothermes.

38. Reprenons l'équation (3) du n° 24 : divisons ses deux membres par ds_1 , et différencions le résultat suivant la caractéristique d ; il viendra

$$\begin{aligned} dx \frac{dx_1}{ds_1} + dy \frac{dy_1}{ds_1} + dz \frac{dz_1}{ds_1} - \frac{dx_1^2}{ds_1} - \frac{dy_1^2}{ds_1} - \frac{dz_1^2}{ds_1} + (x - x_1) d \frac{dx_1}{ds_1} \\ + (\gamma - \gamma_1) d \frac{dy_1}{ds_1} + (z - z_1) d \frac{dz_1}{ds_1} = -\delta\sigma d \frac{d\delta\sigma}{ds_1} - \frac{d\delta\sigma}{ds_1} d\delta\sigma, \end{aligned}$$

ou, en divisant par ds_1 ,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{ds_1} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dx_1}{ds_1} + \frac{dy}{ds} \frac{dy_1}{ds_1} + \frac{dz}{ds} \frac{dz_1}{ds_1} \right) - 1 + (x - x_1) \frac{d \frac{dx_1}{ds_1}}{ds_1} + (\gamma - \gamma_1) \frac{d \frac{dz_1}{ds_1}}{ds_1} \\ + (z - z_1) \frac{d \frac{dz_1}{ds_1}}{ds_1} = -\delta\sigma \frac{d \frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1} - \left(\frac{d\delta\sigma}{ds_1} \right)^2, \end{aligned}$$

et, en transformant comme au n° 28,

$$1 + \frac{\cos \theta_1}{\rho_1} \delta\sigma - \left(\frac{d\delta\sigma}{ds_1} \right)^2 - \delta\sigma \frac{d \frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1} = \frac{ds}{ds_1} \cos \varphi,$$

φ étant toujours l'angle infiniment petit que la tangente en A à la courbe

MAN, prolongée dans le sens suivant lequel sont comptés les arcs positifs de cette courbe, fait avec la tangente en A, à la courbe M, A, N, prolongée aussi dans le sens suivant lequel sont comptés les arcs positifs de cette nouvelle courbe, ρ , le rayon de courbure de M, A, N, au point A, et θ' , l'angle que ce rayon de courbure prolongé de la courbe vers le centre de courbure fait avec AA,.

Multiplions membre à membre l'égalité précédente et l'égalité (6) du n° 28; il viendra, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au second,

$$1 + \delta\sigma \frac{\cos \theta'_1}{\rho_1} - \delta\sigma \frac{\cos \theta}{\rho} - \left(\frac{d\delta\sigma}{ds_1}\right)^2 - \delta\sigma \frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1} - \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\cos \theta'_1}{\rho_1} \delta\sigma^2 = \cos^2 \varphi,$$

ou bien

$$(10) \quad \delta\sigma \frac{\cos \theta'_1}{\rho_1} - \delta\sigma \frac{\cos \theta}{\rho} = \left(\frac{d\delta\sigma}{ds_1}\right)^2 + \delta\sigma \frac{d\frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1} + \delta\sigma^2 \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)^2 - \varphi^2,$$

en remplaçant $1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$ par φ^2 , et $\delta\sigma^2 \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\cos \theta'_1}{\rho_1}$ par $\delta\sigma^2 \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)^2$.

Évaluons maintenant φ et θ'_1 .

Considérons (fig. 15) en même temps que la normale AA, à la courbe MAN au point A, la normale infiniment voisine A'A', prenons A'D = AA, de manière que A, D soit, comme AA', perpendiculaire à AA,, d'après ce qui a été démontré dans le n° 1; enfin, par le point A,, menons A, E parallèle à AA'. Les trois droites A, D, A, E, A, A' formeront un trièdre sensiblement rectangle suivant A, D, et dans lequel: 1° l'angle plan A', A, E sera égal à l'angle φ que nous voulons calculer; 2° l'angle plan DA, A', égal, aux infiniment petits près du second ordre, à $\pm \frac{d\delta\sigma}{ds_1}$, et enfin 3° l'angle plan DA, E égal à l'angle τ que forment les plans osculateurs aux points A et A, de la ligne géodésique dirigée suivant AA,, comme on le voit simplement, en remarquant que le premier de ces plans est perpendiculaire à A, E et l'autre à A, D. Nous pourrions déduire de ce trièdre la relation

$$\varphi^2 = \tau^2 + \left(\frac{d\delta\sigma}{ds_1}\right)^2.$$

Portant cette valeur de φ^2 dans l'égalité (10), on a

$$(11) \quad \delta\sigma \frac{\cos \theta'_1}{\rho_1} - \delta\sigma \frac{\cos \theta}{\rho} = \delta\sigma \frac{d \frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1} + \delta\sigma^2 \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)^2 - \tau^2.$$

Passons à la détermination de θ'_1 . Menons (*fig.* 15), en la dirigeant de la courbe vers le centre de courbure, la normale principale A_1O de M, A, N , au point A_1 , et une normale A_1A_2 à la même courbe, qui soit située sur la surface et du même côté, par rapport à M, A, N , que AA_1 par rapport à MAN ; puis prolongeons AA_1 de manière à avoir A, F : les trois droites A_1O , A_1A_2 , A_1F formeront un trièdre dans lequel la face FA_1O sera égale à l'angle θ'_1 que nous cherchons, la face A_2A_1F égale à l'angle de contingence ε de la courbe AA_1A_2 au point A_1 , la face OA_1A_2 égale à l'angle θ_1 , dont le cosinus divisé par le rayon de courbure ρ_1 de la ligne M, A, N , donne la courbure géodésique de cette ligne, et enfin l'angle dièdre dont l'arête est A_1F égal à l'angle α que forme le plan osculateur de la courbe AA_1A_2 au point A_1 avec le plan normal conduit suivant A_1A_2 , ou plutôt, sans ambiguïté, l'angle moindre que 180 degrés que la normale principale prolongée de la courbe vers le centre de courbure de la courbe AA_1A_2 au point A_1 fait avec la normale à la surface, menée du côté où se trouve la ligne A_1O . Cela étant, nous avons, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\cos \theta_1 = \cos \theta'_1 + \sin \theta'_1 \varepsilon \cos \alpha,$$

d'où

$$\cos \theta'_1 = \cos \theta_1 - \sin \theta'_1 \varepsilon \cos \alpha,$$

ou mieux, en négligeant des infiniment petits du second ordre,

$$\cos \theta'_1 = \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \varepsilon \cos \alpha.$$

Portant dans l'égalité (11) et divisant par $\delta\sigma$, on trouve

$$\frac{\cos \theta_1}{\rho_1} - \frac{\cos \theta}{\rho} = \delta\sigma \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)^2 + \frac{\sin \theta_1 \varepsilon \cos \alpha}{\rho_1} - \frac{\tau^2}{\delta\sigma^2} \right] + \frac{d \frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1}.$$

Cette relation peut être mise sous une forme plus simple. En effet, d'après le théorème de Meunier, $\frac{\sin \theta_1}{\rho_1}$ n'est autre chose que la courbure au point A_1 de

la section normale faite dans la surface suivant A, A_1 , ou, ce qui revient au même, à un infiniment petit près, que la courbure $\frac{1}{r}$ au point A de la section normale faite suivant AB; on doit seulement remarquer que si l'on veut que $\frac{1}{r}$ ait le signe que lui donnent les conventions faites dans le § I, il faut que $\frac{\sin \theta_1}{\rho_1}$, qui est essentiellement positif, soit aussi accompagné d'un signe qui d'ailleurs sera + ou — selon que la normale principale A, O de M, A, N , est dans l'intérieur ou à l'extérieur de la surface. De même $\frac{\varepsilon \cos \alpha}{\delta s}$, précédé du signe + ou du signe — selon que la ligne A, O est intérieure ou extérieure à la surface, est la courbure positive ou négative au point A, de la section normale faite suivant A, A_2 , ou, ce qui revient au même, à un infiniment petit près, à la courbure $\frac{1}{r_1}$ au point A de la section normale faite suivant AA_1 ; d'où résulte d'abord, soit dit en passant, que $\frac{\sin \theta_1}{\rho_1} \frac{\varepsilon \cos \alpha}{\delta s}$ est dans tous les cas égal au produit des deux courbures $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r_1}$. Enfin, $\frac{\tau}{\delta s}$ est évidemment la mesure de la flexion au point A de ligne minimum dirigée suivant AA_1 , ou bien la seconde courbure géodésique $\frac{1}{p}$ de la ligne AA_1, A_2 au point A_1 , abstraction faite du signe. On peut donc écrire l'égalité précédente comme il suit :

$$\frac{\cos \theta_1}{\rho_1} - \frac{\cos \theta}{\rho} = \delta \sigma \left[\left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{rr_1} - \frac{1}{p^2} \right] + \frac{d \frac{d\delta \sigma}{ds_1}}{ds_1}.$$

D'un autre côté, R et R' étant les rayons de courbure principaux positifs ou négatifs de la surface au point A et α , l'angle que la ligne MAN fait au point A avec la section principale correspondante au rayon de courbure R , on a, d'après la formule d'Euler,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R'} \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{R} \sin^2 \alpha + \frac{1}{R'} \cos^2 \alpha.$$

De plus, d'après le résultat obtenu à la fin du n° 16 bis, la seconde courbure géodésique $\frac{1}{p}$ de la courbe AA_1, A_2 au point A, est égale à l'angle pris posi-

tivement que la normale à la surface au point A , fait avec le plan de la normale au point A et de AA_1 . On a donc, d'après le n° 9,

$$\frac{1}{p^2} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right)^2.$$

De là on tire aisément

$$\frac{1}{rr_1} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{RR'} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = \frac{1}{RR'},$$

d'où

$$\frac{\cos \theta_1}{\rho_1} - \frac{\cos \theta}{\rho} = \delta \sigma \left(\frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} + \frac{1}{RR'} \right) + \frac{d \frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1},$$

ou, en remplaçant $\frac{\cos \theta_1}{\rho_1} - \frac{\cos \theta}{\rho}$ par $\delta \frac{\cos \theta}{\rho}$, et $\frac{d \frac{d\delta\sigma}{ds_1}}{ds_1}$ par $\frac{d \frac{d\delta\sigma}{ds}}{ds}$, ce qui n'altère le résultat que d'un infiniment petit du second ordre ; il vient

$$(12) \quad \delta \frac{\cos \theta}{\rho} = \delta \sigma \left(\frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} + \frac{1}{RR'} \right) + \frac{d \frac{d\delta\sigma}{ds}}{ds}.$$

Si $\delta\sigma$ avait la même valeur pour tous les points de MAN, on aurait $\frac{d \frac{d\delta\sigma}{ds}}{ds} = 0$; et la formule deviendrait

$$\delta \frac{\cos \theta}{\rho} = \delta \sigma \left(\frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} + \frac{1}{RR'} \right).$$

Cette formule et la précédente sont très-importantes dans la théorie des lignes tracées sur une même surface.

39. Appelons $\frac{\cos \theta'}{\rho'}$ la courbure géodésique de la courbe $AA_1 A_2$ au point A , et supposons, comme plus haut, afin que ce rapport soit nettement défini, que les arcs positifs de $AA_1 A_2 \dots$ soient comptés de A vers A_1 , c'est-à-dire dans le sens indiqué par la caractéristique δ ; la formule (7) du n° 29 nous donnera

$$\frac{\delta \sigma \cos \theta'}{\rho'} = \frac{d\delta\sigma}{ds_1}.$$

Différentiant les deux membres de cette égalité suivant la caractéristique d ,

il vient

$$d\delta\sigma \frac{\cos \theta'}{\rho'} + \delta\sigma d \frac{\cos \theta'}{\rho'} = d \frac{d\delta\sigma}{ds_1},$$

d'où, en substituant à $d\delta\sigma$, dans le premier membre, sa valeur $\frac{ds_1 \delta\sigma \cos \theta'}{\rho'}$, on trouve, après quelques réductions,

$$d \frac{\cos \theta'}{\rho'} = - ds \left(\frac{\cos \theta'}{\rho'} \right)^2 + \frac{d \frac{d\delta\sigma}{ds}}{\delta\sigma}.$$

Divisons l'égalité (12) du numéro précédent par $\delta\sigma$, l'égalité précédente par ds , et retranchons les deux résultats l'un de l'autre; il viendra

$$(13) \quad \frac{\partial \frac{\cos \theta}{\rho}}{\delta\sigma} - \frac{d \frac{\cos \theta'}{\rho'}}{ds} = \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\cos \theta'}{\rho'} \right)^2 + \frac{1}{RR'}.$$

Cette relation peut être considérée comme exprimant la condition pour que deux systèmes de lignes tracées sur une même surface soient orthogonaux. Pour n'éprouver aucune difficulté dans son interprétation, il faut, d'une part, se rappeler la définition de la courbure géodésique donnée au n° 33, qui ne suppose que la fixation préalable du sens dans lequel croissent les arcs positifs de la courbe et de celui dans lequel on mène les normales extérieures à la surface; puis remarquer que R et R' sont susceptibles d'un double signe déterminé d'ailleurs par la règle du n° 7 au moyen de la normale extérieure à la surface; enfin ne pas perdre de vue que les caractéristiques d et δ représentent des accroissements effectués sur les courbes des deux systèmes considérés et dans le sens suivant lequel croissent les arcs positifs de ces courbes, de telle sorte que l'on peut dire encore que l'une de ces caractéristiques, la caractéristique δ , dans le cas actuel, indique un déplacement sur la surface normalement aux courbes de l'un des systèmes, et dans le sens qui sert à fixer la courbure géodésique de ces courbes, tandis que l'autre indique un déplacement normal aux courbes du second système, et dans le sens opposé à celui que fixe la courbure géodésique de ces nouvelles courbes. On pourrait changer la signification des caractéristiques δ et d , et les considérer l'une et l'autre comme représentant respectivement des accroissements infiniment petits effectués sur la surface normalement aux courbes des deux systèmes considérés, et dans le sens qui sert à fixer

les courbures géodésiques de ces courbes; on aurait alors la formule suivante, qui est plus symétrique que la formule (13),

$$(13 \text{ bis}) \quad \frac{\partial \frac{\cos \theta}{\rho}}{\partial s} + \frac{d \frac{\cos \theta'}{\rho'}}{ds} = \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\cos \theta'}{\rho'}\right)^2 + \frac{1}{RR'}.$$

40. Reprenons la formule

$$d \frac{\cos \theta'}{\rho'} = -ds \left(\frac{\cos \theta'}{\rho'}\right)^2 + \frac{d \frac{d\sigma}{ds}}{\partial \sigma},$$

obtenue dans le numéro précédent, et écrivons en même temps la formule analogue relative à la courbe AA'A'', ce qui donne

$$\delta \frac{\cos \theta}{\rho} = \delta \sigma \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)^2 - \frac{\partial \frac{\partial ds}{\partial \sigma}}{ds};$$

puis multiplions la première de ces formules par $-\delta\sigma$, la seconde par ds , et ajoutons les produits membre à membre; il viendra, d'après l'égalité (13),

$$d \frac{d\sigma}{ds} + \delta \frac{\partial ds}{\partial \sigma} = -\frac{ds \partial \sigma}{RR'},$$

ou, plus simplement,

$$(14) \quad \delta \sigma d^2 \delta \sigma + ds \delta^2 ds = -\frac{ds^2 \partial \sigma^2}{RR'},$$

si l'on suppose que la différentielle seconde $d^2 \delta s$ se rapporte à un double déplacement constant et égal à ds , effectué sur la courbe MAN, et la différentielle seconde $\delta^2 ds$ à un double déplacement constant et égal à δs effectué sur la courbe AA, A₂.

La formule précédente avait été donnée par M. Bertrand dans le *Journal de l'École Polytechnique* (xxx^e cahier), mais pour le cas seulement des lignes de courbure. On voit par ce qui précède qu'elle est vraie généralement pour deux systèmes de lignes orthogonales quelconques.

41. L'égalité (13) exprime, comme nous l'avons dit, la condition pour que des courbes tracées sur une même surface soient orthogonales, et on peut remarquer qu'elle est de même forme que celles que l'on doit à M. Lamé et qui représentent la condition pour que deux systèmes des lignes planes et

trois systèmes de surfaces soient orthogonales. Il est d'ailleurs bien facile de déduire les deux formules de M. Lamé de la nôtre.

En effet, supposons d'abord que les courbes considérées soient planes, c'est-à-dire admettons que la surface sur laquelle elles sont tracées devienne un plan; on aura

$$\frac{1}{RR'} = 0, \quad \frac{\cos \theta}{\rho} = \pm \frac{1}{\rho}, \quad \frac{\cos \theta'}{\rho'} = \pm \frac{1}{\rho'},$$

et l'égalité (13), ou plutôt l'égalité (13 bis), donnera

$$\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial s} + \frac{d \frac{1}{\rho'}}{ds} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2},$$

formule qui est générale comme on l'aperçoit aisément, pourvu que les caractéristiques δ et d se rapportent respectivement à des déplacements infiniment petits effectués normalement aux courbes des deux systèmes considérés, et du côté de ces courbes où se trouvent leurs centres de courbure. C'est la première formule de M. Lamé.

Considérons en second lieu trois systèmes de surfaces orthogonales. D'après le théorème de M. Dupin, deux quelconques de ces systèmes détermineront, par leurs intersections avec une surface quelconque de l'autre système, les lignes de courbure de cette surface, que, pour fixer les idées, je désignerai par surface S. Cela posé, appliquons la formule (13) aux lignes de courbure de cette surface S. Si nous appelons, comme on l'a déjà fait au n° 23, (γ_1, c_2) (γ_2, c) (γ, c_1) les rayons de courbure principaux des trois surfaces conjuguées passant par un même point de la surface S, (γ_1, c_2) se rapportant à cette dernière surface, nous aurons d'abord

$$\frac{\partial \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)}{\partial s} - \frac{d \left(\frac{\cos \theta'}{\rho'} \right)}{ds} = \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\cos \theta'}{\rho'} \right)^2 + \frac{1}{\gamma_1 c_2};$$

mais, en supposant que la ligne de courbure à laquelle se rapportent les rayons principaux c_1, γ_1 soit celle que remplace la courbure MAN des numéros précédents, et, par conséquent, que la ligne de courbure à laquelle se rapportent les rayons c_2, γ_2 soit celle que l'on substitue à AA, A₂..., nous avons, comme il résulte du théorème de Hachette, établi au n° 20, ou

mieux, comme on peut le faire voir directement en se servant de la formule (7) du paragraphe actuel,

$$\frac{\cos \theta}{\rho} = -\frac{1}{c_1}, \quad \frac{\cos \theta'}{\rho'} = \frac{1}{\gamma_2}.$$

Notre formule (13) devient donc

$$\frac{\partial \frac{1}{c_1}}{\partial \sigma} + \frac{d \frac{1}{\gamma_2}}{ds} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\gamma_2^2} - \frac{1}{c_2 \gamma_1},$$

les caractéristiques δ et d se rapportant respectivement à des déplacements effectués normalement aux deux surfaces conjuguées de S , et dans les régions extérieures à ces surfaces, ou bien, en adoptant les notations du n° 23,

$$\frac{d \frac{1}{c_1}}{ds_2} + \frac{d \frac{1}{\gamma_1}}{ds_1} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{c_2 \gamma_1};$$

ce qui est bien l'une des formules de M. Lamé.

En appliquant la formule (13) aux deux surfaces conjuguées de la surface S , on trouverait évidemment de la même manière les deux formules qui, avec la précédente, forment les formules (6) du n° 23.

Nous allons vérifier la formule (13) dans un cas particulier, qui nous fournira l'occasion d'établir quelques propriétés nouvelles des surfaces gauches.

§ IV. — Propriétés des lignes tracées sur les surfaces gauches.

42. Considérons sur une surface gauche quelconque, les génératrices rectilignes et leurs trajectoires orthogonales. Soit MAN (*fig. 16*) l'une de ces dernières lignes. Appelons, pour le point quelconque A , $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$ les première et seconde courbures géodésiques de la ligne MAN ; et afin que ces courbures soient nettement déterminées, conformément d'ailleurs aux définitions des n° 16 et 33, fixons le sens dans lequel croissent les arcs positifs de MAN : ainsi, supposons par exemple que ces arcs soient comptés de M vers N . Soit maintenant AG la normale à MAN tracée d'un certain côté de

cette courbe et sur la surface, normale qui est ici la génératrice rectiligne passant en A, et supposons que la tangente menée à MAN par le point A et dans le sens des arcs positifs de la courbe, AG et la normale extérieure à la surface gauche, soient respectivement placées relativement au point A, comme le sont, dans la position ordinaire, les parties positives des axes des x , des y et des z , par rapport à leur origine.

Si nous appelons $d\theta$ l'angle infiniment petit que forment les deux génératrices rectilignes AG et BG', cet angle, afin qu'il n'en résulte plus tard aucune ambiguïté, étant considéré comme positif ou négatif selon que la génératrice BG' tombe ou non du côté du plan BAG où se trouve la normale extérieure à la surface au point A, nous aurons d'abord par la formule obtenu au n° 14, et en faisant attention que la seconde courbure de la ligne MAN doit être la même, soit que l'on considère cette courbe comme tracée sur la surface gauche proposée, soit qu'on la considère comme tracée sur la surface gauche formée par les normales extérieures à la première surface :

$$d\theta^2 = ds^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} \right),$$

en posant $AB = ds$. On peut joindre à ce premier résultat quelques autres plus ou moins importants.

43. Cherchons, en premier lieu, la distance du point A au point où la perpendiculaire commune à AG et à BG' rencontre AG, c'est-à-dire la distance du point A au point où la ligne de striction de la surface gauche rencontre AG. Soient O le point cherché, et OO' la perpendiculaire commune à AG et à BG'; par le point O' tirons O'C parallèle à OA jusqu'à la rencontre en C du plan mené par le point A perpendiculairement à OA; enfin joignons AC et BC: le triangle rectangle BAC nous donnera

$$BC = AB \sin BAC,$$

ou bien en appelant α l'angle positif (c'est-à-dire compté de AB vers la normale extérieure à la surface au point A) que forme avec AB la droite qui joint le point A au point C, et n_0 la longueur AO précédée du signe + ou du signe —, selon que le point O se trouve sur AG ou sur son prolonge-

ment au-dessus de MAN,

$$n_0 d\theta = ds \sin \alpha,$$

comme on le voit aisément en se rappelant la convention faite sur le signe de $d\theta$; d'un autre côté, d'après la formule du n° 15, on a

$$d\theta \sin \alpha = \frac{ds}{r};$$

donc

$$n_0 = r \sin^2 \alpha,$$

d'où

$$n_0 = \frac{rr'^2}{r^2 + r'^2},$$

car

$$\sin^2 \alpha = \frac{r'^2}{r^2 + r'^2},$$

comme on le déduit aisément des deux relations

$$d\theta \sin \alpha = \frac{ds}{r}, \quad d\theta^2 = ds^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} \right).$$

44. Le même triangle rectangle nous donne la longueur $AC = dp$ de la perpendiculaire commune à AG et à BG', et l'on trouve

$$dp^2 = ds^2 - \frac{r'^2 ds^2}{r^2 + r'^2} = \frac{r^2 ds^2}{r^2 + r'^2},$$

d'où

$$dp = \pm \frac{rds}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

le signe du second membre étant celui qui le rend positif.

45. Considérons maintenant une seconde trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes située à une distance finie de MAN et que nous pourrions regarder, d'après le théorème de M. Gauss démontré au n° 27, comme le lieu des extrémités d'une suite de longueurs égales prises sur les génératrices rectilignes à partir de la courbe MAN.

Soit M, A, N, (*fig. 17*) cette nouvelle courbe. Il va d'abord nous être facile de calculer l'angle positif (c'est-à-dire compté en allant de AB vers la normale extérieure à la surface) que l'élément A, B, fait avec l'élément AB et que nous appellerons ϕ . En effet, tirons par le point B, la ligne B, C pa-

rallèle à A, A jusqu'à la rencontre en C du plan perpendiculaire à AA, mené par le point A; le triangle ABC nous donnera

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 AB \cdot AC \cos \varphi,$$

ou, en appelant n la longueur AA,, précédée du signe + ou du signe —, selon que le point A, est sur AG ou sur son prolongement au-dessus de MAN,

$$n^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} \right) = 1 + \left(\frac{A_1 B_1}{AB} \right)^2 - 2 \frac{A_1 B_1}{AB} \cos \varphi.$$

Mais, d'après la formule (6) démontrée au n° 28,

$$(a) \quad \cos \varphi \frac{A_1 B_1}{AB} = 1 - \frac{n}{r};$$

on a donc

$$n^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} \right) = 1 + (1 + \tan^2 \varphi) \left(1 - \frac{n}{r} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{n}{r} \right),$$

ou

$$\frac{n^2}{r'^2} = \tan^2 \varphi \left(1 - \frac{n}{r} \right)^2,$$

d'où

$$\tan \varphi = \pm \frac{\frac{n}{r'}}{1 - \frac{n}{r}},$$

d'où, par conséquent,

$$\sin \varphi = \pm \frac{\frac{n}{r'}}{\sqrt{\left(\frac{n}{r'} \right)^2 + \left(\frac{n}{r} - 1 \right)^2}}, \quad \cos \varphi = \pm \frac{1 - \frac{n}{r}}{\sqrt{\left(\frac{n}{r'} \right)^2 + \left(\frac{n}{r} - 1 \right)^2}}.$$

Quant aux signes, ils se déterminent simplement: par la formule (a), on voit que celui qui convient au cosinus est +, à l'inspection de la figure et en se rappelant la propriété de $\frac{1}{r'}$ du n° 16 bis, que celui qui convient au sinus est —, d'où résulte que celui qui convient à la tangente est aussi —; ainsi on a

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= - \frac{\frac{n}{r'}}{1 - \frac{n}{r}}, & \sin \varphi &= - \frac{\frac{n}{r'}}{\sqrt{\left(\frac{n}{r'} \right)^2 + \left(\frac{n}{r} - 1 \right)^2}}, \\ \cos \varphi &= \frac{1 - \frac{n}{r}}{\sqrt{\left(\frac{n}{r'} \right)^2 + \left(\frac{n}{r} - 1 \right)^2}}. \end{aligned}$$

46. On peut aussi, au moyen de la formule (a), avoir aisément l'élément A, B, que nous appellerons ds_1 ; et il vient

$$ds_1 = ds \frac{r-n}{r \cos \varphi} = ds \sqrt{\left(\frac{n}{r'}\right)^2 + \left(\frac{n}{r} - 1\right)^2}.$$

Enfin on peut calculer les première et seconde courbures géodésiques de M, A, N, au point A, que nous appellerons $\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r'_1}$.

En effet, on a d'abord, d'après la formule (7), n° 29 bis,

$$\frac{ds_1}{r_1} = - \frac{d \cdot ds_1}{dn},$$

d'où, en substituant à ds_1 sa valeur,

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{n}{r'}\right)^2 + \left(\frac{n}{r} - 1\right)^2}}{r_1} = - \frac{\frac{n}{r'^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{n}{r} - 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{n}{r'}\right)^2 + \left(\frac{n}{r} - 1\right)^2}},$$

d'où

$$\frac{1}{r_1} = - \frac{n(r^2 + r'^2) - r'^2 r}{r'^2 (r-n)^2 + n^2 r^2};$$

puis on a aussi

$$\frac{ds_1^2}{r_1^2} + \frac{ds_1^2}{r'^2_1} = \frac{ds^2}{r^2} + \frac{ds^2}{r'^2},$$

puisque les deux membres représentent le carré de l'angle infiniment petit des deux génératrices AG et BG'; de là on tire

$$\begin{aligned} \frac{ds_1^2}{r'^2_1} &= ds^2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} - \frac{[nr^2 - r'^2(r-n)]^2}{r^2 r'^2 [r'^2 (r-n)^2 + n^2 r^2]} \right\} \\ &= \frac{r^2 ds^2}{r'^2 (r-n)^2 + n^2 r^2} = \frac{r^2 ds^2}{r^2 r'^2 ds_1^2} = \frac{ds^2}{r'^2 ds_1^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{ds_1^2}{r'^2_1} = \pm \frac{ds^2}{r'^2},$$

ou simplement

$$\frac{ds_1^2}{r'^2_1} = \frac{ds^2}{r'^2};$$

car évidemment r'_1 et r' sont de même signe.

On déduit de là que le rayon de seconde courbure géodésique des tra-

jectoires orthogonales des génératrices rectilignes varie pour les différents points d'une même génératrice proportionnellement au carré de la distance de ces points à la génératrice rectiligne infiniment voisine de celle qui les contient.

47. La valeur de $\frac{1}{r_1}$ nous donne un résultat analogue. En effet, elle montre que

$$\frac{ds_1^2}{r_1} = \left[\frac{1}{r} - n \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} \right) \right] ds^2,$$

d'où

$$\frac{d \frac{ds_1^2}{r_1}}{\frac{r_1}{dn}} = - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} \right) ds^2 = - d\theta^2.$$

Ainsi la variation pour un déplacement constant effectué sur une génératrice rectiligne du rapport du carré de ds , au rayon de première courbure géodésique des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes est constante pour tous les points de la génératrice rectiligne considérée, et égale au carré pris en signe contraire de l'angle de cette génératrice avec la génératrice infiniment voisine multipliée par le déplacement.

48. On peut obtenir une expression très-simple de la courbure de la surface, en un point quelconque A_1 ; en effet, nous avons déjà vu (n° 19) que cette courbure avait pour valeur, abstraction faite du signe, la dérivée par rapport à n de l'angle ϕ que forme le plan tangent en A_1 avec un plan tangent fixe, le plan tangent en A par exemple: mais, d'après une formule obtenue plus haut,

$$\text{tang } \phi = \frac{nr}{r'(n-r)};$$

donc

$$d\phi \left(1 + \frac{n^2 r^2}{r'^2 (n-r)^2} \right) = \frac{r' r (n-r) - r r' n}{r'^2 (n-r)^2} dn;$$

donc

$$\frac{d\phi}{dn} = \frac{-r' r^2}{r'^2 (n-r)^2 + n^2 r^2} = \frac{-r' r^2 ds^2}{r'^2 r^2 ds_1^2} = - \frac{1}{r_1'}$$

Rapprochant ce résultat, que, du reste, nous aurions pu poser immédiatement, car ce n'est autre chose que celui qui a été démontré au n° 3, de celui que nous avons obtenu au n° 46, nous voyons que *la courbure de la surface varie le long d'une génératrice rectiligne, dans le rapport inverse*

du carré de la perpendiculaire menée à cette génératrice et terminée à la génératrice infiniment voisine.

49. On peut mettre toutes les formules qui précèdent sous une forme beaucoup plus simple. Pour cela, substituons à la distance n de la courbe $M, A, N,$ à la courbe MAN , la portion des génératrices rectilignes comprise entre la courbe $M, A, N,$ et la ligne de striction, distance qui, au lieu d'être constante comme n pour tous les points de $M, A, N,$, sera généralement variable, et qui d'ailleurs devra être précédée comme n d'un signe convenable: à cet effet, nous changerons n en

$$n + n_0 = n + \frac{rr'}{r^2 + r'^2};$$

en même temps nous exprimerons ds en fonction de dp , longueur de la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines, que nous avons trouvée égale à

$$\pm \frac{ds \frac{1}{r'}}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}}} = \pm \frac{rds}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

le signe du premier membre étant celui de r' , et le signe du second celui de r . Il viendra d'abord, par la première substitution,

$$\text{tang } \phi = \frac{nr(r^2 + r'^2) + r^2 r'}{r' [n(r^2 + r'^2) - r^2]}.$$

Enfin nous introduirons à la place de ϕ , qui représente l'angle positif (c'est-à-dire compté de AB vers la normale extérieure à la surface gauche au point A) que fait le plan tangent en A , avec le plan tangent en A , l'angle analogue que le plan tangent en A , fait avec le plan tangent en O , où la génératrice AG est rencontrée par la ligne de striction. Pour obtenir la formule de transformation, déterminons d'abord l'angle ϕ_0 que fait le plan tangent en O avec le plan tangent en A ; pour cela posons $n = 0$ dans la formule précédente, ce qui donne

$$\text{tang } \phi_0 = - \frac{r'}{r}.$$

Maintenant il est clair qu'il suffira de changer ϕ en $\phi + \phi_0$; il viendra ainsi, après un calcul dont nous n'indiquons pas le détail parce que nous allons

obtenir plus simplement le résultat qu'il fournit,

$$\text{tang } \phi = - \frac{n(r^2 + r'^2)}{r^2 r'};$$

semblablement, on trouve, au moyen de formules établies plus haut,

$$ds_1 = \pm \frac{dp}{r^2 r'} \sqrt{(r^2 + r'^2)^2 n^2 + r^4 r'^2},$$

$$\frac{1}{r_1} = - \frac{n(r^2 + r'^2)^2}{(r^2 + r'^2)^2 n^2 + r^4 r'^2},$$

$$\frac{1}{r'_1} = \frac{(r^2 + r'^2) r^2 r'}{(r'^2 + r^2)^2 n^2 + r^4 r'^2}.$$

50. Appelons $\frac{1}{r_0}$ et $\frac{1}{r'_0}$ les valeurs des première et seconde courbures géodésiques des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes pour le point O ; nous aurons

$$\frac{1}{r_0} = 0, \quad \frac{1}{r'_0} = \frac{r^2 + r'^2}{r^2 r'},$$

et, par conséquent,

$$\text{tang } \phi = - \frac{n}{r'_0},$$

$$ds_1 = dp \sqrt{\left(\frac{n}{r'_0}\right)^2 + 1},$$

$$\frac{1}{r_1} = - \frac{n}{n^2 + (r'_0)^2},$$

$$\frac{1}{r'_1} = \frac{r'_0}{n^2 + (r'_0)^2}.$$

51. Ces formules qui sont, comme l'on voit, d'une extrême simplicité, peuvent se démontrer directement.

Soient (*fig. 18*) OG et O'G' deux génératrices rectilignes infiniment voisines, et menées de telle sorte que OO', OG et la normale extérieure à la surface gauche au point O soient respectivement placées, par rapport à ce point, comme les parties positives des axes des *x*, des *y* et des *z* par rapport à l'origine; supposons en même temps que OO' soit la perpendiculaire commune de OG et de O'G'. Par le point O' tirons O'H parallèle à OG, et ayant pris un point quelconque A sur OG, menons AB et AC perpendiculairement à OG, de manière que la première ligne rencontre O'G' en B, et la

seconde O'H en C. AC parallèle à OO' sera perpendiculaire au plan BO'C, et, par conséquent, à CB; donc le triangle BAC nous donnera

$$\text{tang BAC} = \frac{CB}{AC},$$

ou bien, en appelant φ l'angle positif (c'est-à-dire compté de OO' vers la normale extérieure à la surface au point O) que forme avec OO' la droite qui joint le point A au point B, n la distance OA précédée du signe + ou du signe —, selon que le point A est sur OG ou sur son prolongement au-dessus de OO', $d\theta$ l'angle de O'G' et de OG précédé du signe + ou du signe —, selon que O'G' tombe ou non du côté du plan GOO' où se trouve la normale extérieure à la surface au point O, et enfin dp la longueur OO',

$$\text{tang } \varphi = \frac{nd\theta}{dp} = \frac{n}{\frac{dp}{d\theta}};$$

on a aussi, au moyen du même triangle rectangle ABC,

$$AB = ds = AC \frac{1}{\cos \varphi} = dp \sqrt{1 + \left(\frac{n}{\frac{dp}{d\theta}}\right)^2}.$$

On déduit de là

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{dds}{dn} \cdot \frac{1}{AB} = -\frac{n}{n^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2},$$

et

$$\left(\frac{1}{r_1'}\right)^2 = \frac{d\theta^2}{ds^2} - \left(\frac{1}{r_1}\right)^2 = \frac{1}{n^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2} - \frac{n^2}{\left[n^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2\right]^2} = \frac{\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2}{\left[n^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2\right]^2},$$

d'où

$$\frac{1}{r_1'} = -\frac{\frac{dp}{d\theta}}{n^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2},$$

en remarquant que r_1' et $d\theta$ ont des signes contraires, ce qui s'aperçoit aisément. Reste seulement à montrer, pour que ces formules coïncident tout à fait avec celles que nous avons déjà obtenues, que $\frac{1}{r_1'}$, ou la seconde cour-

bure géodésique des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes pour le point O, est égale et de signe contraire à $\frac{d\theta}{dp}$. Or, si nous prenons $OD = OO'$, et que nous menions DE et DF perpendiculaires à OG et rencontrant $O'G'$ et $O'H$ en E et F, les deux triangles DFE et $O'FE$ seront évidemment égaux; donc on aura

$$EDF = \pm d\theta,$$

et, par conséquent,

$$\frac{EDF}{OD} = \pm \frac{d\theta}{dp},$$

ou

$$\frac{1}{r'} = \pm \frac{d\theta}{dp};$$

de plus, on voit facilement que le signe qu'il faut prendre dans le second membre est toujours le signe inférieur.

52. Je ferai remarquer que de la formule

$$\text{tang } \phi = - \frac{n}{r'},$$

qui fait connaître la loi suivant laquelle varie le plan tangent tout le long d'une même génératrice, on peut facilement déduire une propriété démontrée par M. Chasles, dans le Journal de M. Liouville, et d'après laquelle le produit des distances du point O aux points de contact situés sur une même génératrice OG, et relatifs à deux plans tangents perpendiculaires entre eux, a toujours la même valeur. On voit en effet, d'après la formule précédente, que ce produit est $(r'_0)^2$, c'est-à-dire le carré de l'inverse de la courbure au point O.

53. Il nous est bien facile maintenant de vérifier la formule (13) du paragraphe précédent, dans le cas où l'on considère les génératrices rectilignes de la surface gauche et leurs trajectoires orthogonales. En effet, on a alors

$$\frac{\cos \theta'}{\rho'} = 0, \quad \frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{1}{r_1} = - \frac{n}{n^2 + (r'_0)^2}, \quad \frac{\partial \frac{\cos \theta}{\rho}}{\partial \sigma} = \frac{d \frac{1}{r_1}}{dn} = - \frac{(r'_0)^2 - n^2}{[n^2 + (r'_0)^2]^2},$$

puis

$$\frac{1}{RR'} = - \frac{1}{(r'_1)^2} = - \frac{(r'_0)^2}{[n^2 + (r'_0)^2]^2},$$

en remarquant que les deux rayons de courbure principaux sont de sens contraires, et la formule dont il s'agit devient

$$-\frac{(r'_0)^2 - n^2}{[n^2 + (r'_0)^2]^2} = \frac{n^2}{[n^2 + (r'_0)^2]^2} - \frac{(r'_0)^2}{[n^2 + (r'_0)^2]^2};$$

ce qui est bien une identité.

54. Pour que les résultats précédents aient une véritable utilité et puissent servir dans la solution des problèmes relatifs aux surfaces gauches, il faut que l'on sache calculer les éléments qui y entrent comme $d\theta$, dp , r , r' , etc., en fonction des données ordinaires par lesquelles on détermine ces surfaces.

Supposons donc que l'on connaisse une directrice quelconque mAm' de la surface (*fig. 19*), et soient

$$(a) \quad x = f(u), \quad y = \phi(u), \quad z = \psi(u)$$

les coordonnées de l'un quelconque de ses points en fonction du paramètre u ; donnons-nous encore les angles α , β , γ , que les génératrices rectilignes forment avec les parties positives des axes des coordonnées, α , β , γ étant aussi des fonctions de u . En appelant n la longueur AM , les coordonnées du point quelconque M de la surface seront

$$X = x + n \cos \alpha, \quad Y = y + n \cos \beta, \quad Z = z + n \cos \gamma,$$

et l'élimination de n et de u entre ces trois équations fournira l'équation en X , Y , Z de la surface qui se trouve ainsi parfaitement déterminée.

Proposons-nous de calculer en fonction de ces données, d'abord pour le point quelconque A de la directrice, les valeurs des éléments $d\theta$, ds , r , r' définis plus haut.

Posons

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [f'(u)^2 + \phi'(u)^2 + \psi'(u)^2] du^2 = U du^2,$$

$$\cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz = [\cos \alpha f'(u) + \cos \beta \phi'(u) + \cos \gamma \psi'(u)] du = U_1 du;$$

U et U_1 seront des fonctions de u faciles à calculer au moyen des données, et qui feront connaître, l'une l'élément AB de la courbe mAm' , et l'autre l'angle i que les génératrices rectilignes font avec cette courbe. Il est clair,

en effet, que l'on a

$$AB = du \sqrt{U}, \quad \cos i = \frac{U_1}{\sqrt{U}}.$$

De là nous déduirons immédiatement

$$ds = AB \sin i = du \sqrt{U - U_1^2},$$

ds étant l'élément de la trajectoire orthogonale passant par A des génératrices rectilignes.

Avant d'aller plus loin, il est bon de dire que, pour fixer les idées, nous supposons : 1° que les arcs positifs de mAm' sont comptés de telle sorte que ces arcs et u croissent en même temps ; et 2° que les génératrices rectilignes, qui d'ailleurs occupent, par rapport à la direction des arcs positifs de leurs trajectoires orthogonales et à celle des normales extérieures à la surface gauche, la position définie au n° 42, sont placées du côté de mAm' , où il faut mener les normales à ces courbes sur la surface pour déterminer leur courbure géodésique. De cette manière les radicaux dans les formules précédentes doivent tous être affectés du signe +, et l'angle i que nous regardons comme l'angle positif (c'est-à-dire compté des génératrices rectilignes vers la direction des arcs positifs des trajectoires orthogonales de ces génératrices) que forment les génératrices rectilignes dans le sens où on les suppose prolongées avec les arcs positifs de la directrice AmB , est toujours moindre que 180 degrés.

Considérons maintenant la première courbure géodésique $\frac{1}{r}$ de la trajectoire passant par A des génératrices rectilignes ; appelons ρ le rayon de courbure de la courbe mAm' au point A, et θ l'angle que le plan osculateur de cette courbe fait en ce point avec le plan tangent de la surface, ou plutôt, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, l'angle que la normale principale prolongée de la courbe vers le centre de courbure fait avec la normale à la courbe tracée sur la surface dans un sens qui la place, par rapport à la tangente AT de mAm' et à la normale extérieure à la surface, comme l'axe des y est placé par rapport à celui des x et à celui des z , de manière que $\frac{\cos \theta}{\rho}$ soit la première courbure géodésique de la courbe mAm' au point A ; nous aurons d'abord, au moyen de la formule (9) du § III, et en supposant que

les génératrices rectilignes et leurs trajectoires orthogonales soient les lignes coordonnées,

$$\frac{di}{AB} = \frac{\sin i}{r} - \frac{\cos \theta}{\rho},$$

d'où

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{\cos \theta}{\rho} + \frac{di}{AB} \right) \frac{1}{\sin i}.$$

Pour bien se rendre compte du signe que nous donnons ici à di , il faut remarquer qu'en vertu de l'hypothèse faite sur le sens suivant lequel on prolonge les génératrices rectilignes et leurs trajectoires orthogonales, i n'a pas la même signification que dans la formule (9) du § III, et qu'il est le complément ou le complément augmenté de 360 degrés de l'angle qui entre dans cette formule.

L'équation précédente peut être mise sous une autre forme. Menons par le point A la normale principale AN, et la tangente AT de la courbe mAm' ; soit d'ailleurs ϕ l'angle NAM: le trièdre formé par AT, AN, AM nous donnera

$$\cos \phi = \sin i \cos \theta.$$

On a donc

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sin^2 i} \left(\frac{\cos \phi}{\rho} + \frac{\sin i di}{AB} \right) = \frac{1}{\sin^2 i} \left(\frac{\cos \phi}{\rho} - \frac{d \cos i}{AB} \right).$$

Or

$$\cos i = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma,$$

en appelant, pour abréger, a, b, c les cosinus des angles que la tangente à la courbe mAm' fait avec les parties positives des axes; donc

$$\begin{aligned} \frac{d \cos i}{AB} &= \cos \alpha \frac{da}{AB} + \cos \beta \frac{db}{AB} + \cos \gamma \frac{dc}{AB} + a \frac{d \cos \alpha}{AB} + b \frac{d \cos \beta}{AB} + c \frac{d \cos \gamma}{AB} \\ &= \frac{\cos \phi}{\rho} + a \frac{d \cos \alpha}{AB} + b \frac{d \cos \beta}{AB} + c \frac{d \cos \gamma}{AB}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d \cos i}{AB} - \frac{\cos \phi}{\rho} = a \frac{d \cos \alpha}{AB} + b \frac{d \cos \beta}{AB} + c \frac{d \cos \gamma}{AB}.$$

Ainsi, posant

$$\begin{aligned} &\frac{AB^2}{du^2} \left(a \frac{d \cos \alpha}{AB} + b \frac{d \cos \beta}{AB} + c \frac{d \cos \gamma}{AB} \right) \\ &= f'(u) \cdot \frac{d \cos \alpha}{du} + \phi'(u) \frac{d \cos \beta}{du} + \psi'(u) \frac{d \cos \gamma}{du} = U_2, \end{aligned}$$

U_1 étant dès lors une fonction facile à obtenir, nous aurons

$$\frac{1}{r} = \frac{-U_1}{U \sin^2 i} = \frac{U_1}{U_1^2 - U}.$$

On peut aussi obtenir facilement $\frac{1}{r'}$. En effet, on a d'abord

$$d\theta^2 = U_3 du^2,$$

en posant, pour abréger,

$$\left(\frac{d \cos \alpha}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \beta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \gamma}{du}\right)^2 = U_3,$$

et puis

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{r'}\right)^2 + \frac{U_1^2}{(U - U_1^2)^2} = \frac{U_3}{U - U_1^2},$$

d'où

$$\pm \frac{1}{r'} = \frac{\sqrt{U_3(U - U_1^2) - U_1^2}}{U - U_1^2},$$

formule dans laquelle, on le reconnaît aisément, on doit adopter le signe qui rend le premier membre positif; enfin, connaissant ds , $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$, il sera facile

d'avoir dp au moyen de la relation $dp = \pm \frac{ds \frac{1}{r'}}{\sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'}\right)^2}}$, et l'on obtiendra

$$dp = du \sqrt{U - U_1^2 - \frac{U_1^2}{U_3}}.$$

Ces différentes formules nous seront utiles par la suite.

55. Nous n'avons calculé les valeurs de ds , $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$ que pour les points de mAm' ; mais il est évident qu'une fois que ces éléments seront connus pour les points de la courbe directrice, il nous sera facile de les obtenir pour un point quelconque au moyen des formules du n° 46, et alors on pourra appliquer les résultats établis plus haut.

56. Nous terminerons par quelques remarques relatives à la ligne de striction de la surface gauche et aux trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes. D'abord nous pouvons facilement obtenir l'équation de ces lignes. En effet, considérons d'abord la ligne de striction, appelons n la distance positive ou négative du point de cette ligne situé sur AG au point A;

on a, d'après ce qu'on a vu plus haut (n° 43),

$$n = \frac{\frac{1}{r}}{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'}\right)^2},$$

d'où, en substituant à $\frac{1}{r}$ et à $\frac{1}{r'}$ leurs valeurs, il vient la relation

$$n = -\frac{U_2}{U_3},$$

que l'on peut considérer comme l'équation en n et u de la ligne de striction. Quant aux trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes, on remarquera que, ces lignes étant équidistantes d'après le théorème de M. Gauss, démontré au n° 26, on doit avoir pour une quelconque d'entre elles,

$$dn + AB \cos i = 0,$$

ou bien

$$dn + U_1 du = 0,$$

ce qui donne

$$n + \int U_1 du = \text{const.}$$

pour l'équation générale de ces lignes.

57. On peut obtenir une seconde équation de la ligne de striction; nous savons, d'après le n° 50, que pour tous les points de cette ligne, et pour ces points seulement,

$$\frac{1}{r} = 0.$$

D'ailleurs, pour toute courbe tracée sur la surface gauche, on a, comme on l'a vu au n° 54 pour la courbe mAm' ,

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{di}{ds} + \frac{\cos \theta}{\rho}\right) \frac{1}{\sin i},$$

i étant l'angle variable et déterminé, comme il a été dit plus haut, que la courbe fait avec les génératrices rectilignes, $\frac{\cos \theta}{\rho}$ sa première courbure géodésique, ds l'élément de la courbe, et enfin di l'accroissement de l'angle i pour un déplacement infiniment petit effectué sur la courbe et dans le sens des arcs positifs; on a donc pour la ligne de striction, et seulement pour

cette ligne,

$$(a) \quad \frac{di}{ds} + \frac{\cos \theta}{\rho} = 0.$$

On peut conclure de là que si la ligne de striction coupe sous un angle constant les génératrices rectilignes de la surface gauche, auquel cas $\frac{di}{ds}$ sera nul, on aura $\frac{\cos \theta}{\rho} = 0$, et, par conséquent, la ligne de striction sera une ligne géodésique; de même que si la ligne de striction est une ligne géodésique, auquel cas $\frac{\cos \theta}{\rho} = 0$, on aura $\frac{di}{ds} = 0$, et cette ligne coupera sous le même angle toutes les génératrices rectilignes. Enfin on peut dire aussi qu'une ligne tracée sur une surface gauche qui coupe sous un angle constant les génératrices rectilignes de la surface, et qui est en même temps ligne géodésique, ne peut être que la ligne de striction.

57 bis. La formule (a) du numéro précédent, qui caractérise la ligne de striction d'une surface gauche et qui peut être utile dans un grand nombre de circonstances, peut s'établir directement comme il suit :

Soient (fig. 20) mm' , $m'm''$ deux éléments consécutifs d'une ligne tracée sur une surface gauche, et mG et $m'G'$ les deux génératrices rectilignes de cette surface qui passent par les points m et m' , menées respectivement du côté de mm' et $m'm''$, où se trouvent les perpendiculaires à ces éléments qui servent à déterminer la première courbure géodésique de la courbe en m et m' ; prolongeons mm' suivant $m't$: le trièdre formé par $m'G'$, $m'm''$ et $m't$ nous donnera

$$\cos G'm'm'' = \cos G'm't \cos m''m't + \sin G'm't \sin m''m't \cos \widehat{G'm't, m''m't},$$

ou bien, en posant

$$mm' = ds, \quad Gmm' = i, \quad G'm'n'' = i + di, \quad G'm't = i + \varepsilon,$$

et représentant par $\frac{\cos \theta}{\rho}$ la courbure géodésique de la courbe considérée au point m ou au point m' ,

$$\cos i - \sin i di = \cos i - \sin i \varepsilon + \sin i ds \frac{\cos \theta}{\rho},$$

$$\text{d'où} \quad \frac{di}{ds} + \frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{\varepsilon}{ds}.$$

Actuellement, si m est un point de la ligne de striction, le plan parallèle aux deux lignes mG et $m'G'$ sera perpendiculaire au plan Gmt ; par conséquent,

les angles que mG et $m'G'$ feront avec une droite mm' située dans le plan Gmt seront égaux entre eux, et ε sera nul: comme aussi réciproquement si ε est nul, c'est-à-dire si les angles que forment avec mt les deux droites mG et $m'G'$ sont égaux entre eux, le plan parallèle à mG et à $m'G'$ sera perpendiculaire à Gmt , et, par suite, le point m sera un point de la ligne de striction. Nous voyons par là que l'équation

$$\frac{di}{ds} + \frac{\cos \theta}{\rho} = 0$$

convient à tous les points de la ligne de striction et ne convient qu'à eux; comme il fallait le démontrer.

58. Nous allons faire une application de la formule précédente, en démontrant une propriété mécanique assez curieuse de la ligne de striction de toute surface gauche.

On sait que dans le mouvement d'un point libre, la composante de la force suivant toute direction fixe est égale à la dérivée par rapport au temps de la composante de la vitesse suivant cette même direction. Cette propriété a lieu aussi quand on substitue à la direction fixe, celle de la tangente à la trajectoire qui est variable. Or on peut se proposer de trouver toutes les directions variables pour lesquelles la propriété en question a lieu: on trouve ainsi, ce qui me paraît assez curieux, que ce sont les directions des droites qui forment une surface gauche ayant pour ligne de striction la trajectoire du mobile. Pour le démontrer, soit (*fig. 21*) AmB la trajectoire que décrit le mobile considéré sous l'action d'une force R ; nous pourrions d'abord regarder cette force comme la résultante de deux autres: l'une tangente à la trajectoire et dirigée dans le sens du mouvement; l'autre normale à cette courbe, située dans son plan osculateur et dirigée de la courbe vers le centre de courbure, les intensités de ces forces étant d'ailleurs $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$, où v représente la vitesse du mobile, ρ le rayon de courbure de la trajectoire et t le temps. Ceci posé, soit mX la direction cherchée pour le point quelconque m ; la composante de la force R suivant mX sera égale à la somme des composantes suivant la même direction des forces $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$, c'est-à-dire à

$$\frac{dv}{dt} \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} \cos \beta.$$

Nous appelons α l'angle moindre que 180 degrés que mX fait avec la tangente mT à AmB au point m , prolongée dans le sens du mouvement, et β l'angle de mX avec la normale principale mC au même point, dirigée de la courbe vers le centre de courbure; exprimant que cette composante est égale à la dérivée par rapport au temps de la composante suivant mX de la vitesse, il vient

$$\frac{dv}{dt} \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} \cos \beta = \frac{d(v \cos \alpha)}{dt} = \frac{dv}{dt} \cos \alpha - v \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt},$$

d'où l'on tire aisément, en observant que $v = \frac{ds}{dt}$,

$$\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\cos \beta}{\rho} = 0.$$

Mais le trièdre formé par mX , la tangente mT à la trajectoire, et la normale principale mC de la même courbe donne

$$\cos \beta = \sin \alpha \cos \theta,$$

θ étant l'angle du plan XmT avec TmC , ou mieux, l'angle de la normale principale mC prolongée de la courbe vers le centre de courbure avec la normale menée dans le plan TmX et du côté de la tangente où se trouve mX ; donc

$$\frac{d\alpha}{ds} + \frac{\cos \theta}{\rho} = 0.$$

Cette équation coïncidant avec l'équation (a) du n° 57, on peut conclure, comme on l'avait énoncé, que le lieu géométrique des droites telles que mX est une surface gauche ayant AmB pour ligne de striction.

§ V. — *Remarques relatives à deux systèmes particuliers de lignes orthogonales tracées sur une surface quelconque.*

59. Les formules que nous avons établies aux n°s 39 et 40 conviennent à deux systèmes quelconques de lignes orthogonales tracées sur une surface; elles s'appliquent donc en particulier aux deux systèmes que l'on obtient en prenant, d'une part, les lignes géodésiques issues d'un même point A de la surface, et, d'une autre part, les lignes passant par les extrémités de longueurs égales comptées à partir du point A (*fig. 22*) sur les

premières lignes. En effet, ces deux systèmes sont orthogonaux comme on l'a démontré au n° 26. On peut même remarquer que dans ce cas les formules dont il s'agit se simplifient; car la première courbure géodésique des lignes du premier système est alors égale à zéro.

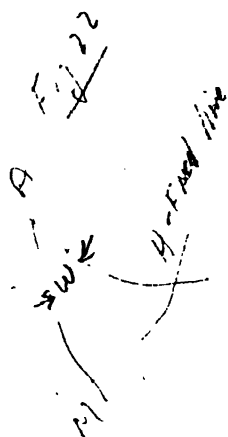
Nous appellerons r la longueur variable que l'on prend à partir du point A sur les lignes géodésiques issues de ce point pour obtenir les différentes lignes telles que MH, qui coupent à angle droit ces lignes géodésiques, ω l'angle variable que forme au point A la tangente à la ligne géodésique quelconque AM avec la tangente à la ligne géodésique AH que l'on suppose fixe et déterminée, x l'arc HM compté à partir de AH, des trajectoires orthogonales de lignes géodésiques. Enfin nous désignerons, comme dans ce qui précède, par R et R' les rayons de courbure principaux de la surface, ces rayons ayant un signe déterminé comme au n° 7, et nous supposerons que les caractéristiques d et δ se rapportent respectivement à des déplacements infiniment petits effectués sur les lignes géodésiques coordonnées, et sur leurs trajectoires orthogonales, dans le sens des arcs positifs de ces lignes, que l'on suppose d'ailleurs fixé comme au n° 24.

60. Ceci posé, la formule (14) du n° 40 devient

$$\frac{d^2 \delta x}{dr^2} = - \frac{\delta x}{RR'}.$$

Or supposons $\frac{1}{RR'}$ calculé en fonction de r et ω . Si l'on peut intégrer l'équation précédente, qui est linéaire du second ordre et à coefficients variables, on en tirera δx en fonction de r et ω .

Les deux constantes qu'introduira l'intégration se détermineront sans difficulté; il suffira de remarquer que pour $r = 0$, on a $\delta x = 0$, et $\frac{d\delta x}{dr} = d\omega$, ce qui prouve, soit dit en passant, en vertu de ce que l'on sait sur l'intégrale générale des équations linéaires, que δx aura la forme $Kd\omega$, K étant généralement une fonction de r et de ω . δx étant connu, on pourra avoir immédiatement la première courbure géodésique des courbes telles que HM: en effet, cette courbure est égale, comme au n° 39, à $\frac{d\delta x}{dr \delta x}$; et puis on résoudra, comme sur un plan, la plupart des problèmes relatifs aux lignes tracées sur la surface.



61. Ainsi, considérons une courbe tracée sur la surface et dont l'équation en r et ω soit

$$r = f(\omega).$$

Il sera facile d'avoir l'arc et l'aire de cette courbe terminés aux lignes géodésiques correspondantes à deux valeurs quelconques ω_0 et ω_1 de ω . En effet, posant

$$\delta x = \varphi(r, \omega) d\omega,$$

et appelant s et A l'arc et l'aire cherchés, il est clair qu'on aura

$$s = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \sqrt{f'(\omega)^2 + \varphi(f(\omega), \omega)^2},$$

$$A = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_0^{f(\omega)} \varphi(r, \omega) dr.$$

$f'(\omega)$ représentant la dérivée de $f(\omega)$ relative à ω .

S'il s'agit de trouver l'équation d'une ligne coupant sous un angle positif (c'est-à-dire compté de la direction des arcs positifs des lignes géodésiques coordonnées vers celle des arcs positifs des trajectoires orthogonales de ces lignes) représenté par α , les lignes géodésiques coordonnées, on trouvera immédiatement pour son équation différentielle,

$$\text{tang } \alpha dr = \varphi(r, \omega) d\omega.$$

Pour obtenir l'équation des lignes géodésiques quelconques, on emploiera d'abord la formule (8) du § III, qui donnera, on le voit aisément,

$$\frac{di}{ds} = - \frac{\cos \theta}{\rho} \sin i = - \frac{\varphi'_r(r, \omega)}{\varphi(r, \omega)} \sin i,$$

i représentant l'angle positif que fait la ligne cherchée avec les lignes géodésiques issues du point A, $\frac{\cos \theta}{\rho}$ la première courbure géodésique des lignes coordonnées telles que MH, $\frac{di}{ds}$ la dérivée de l'angle i par rapport à l'arc s de la courbe, et enfin $\varphi'_r(r, \omega)$ la dérivée relative à r de $\varphi(r, \omega)$; puis on remarquera que

$$\text{tang } i = \frac{\varphi(r, \omega) \frac{dr}{d\omega}}{\frac{dr}{d\omega}}$$

d'où

$$\frac{di}{ds} \left[1 + \frac{\varphi(r, \omega)^2}{\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2} \right] = \left[\phi'_r(r, \omega) + \frac{\phi'_\omega(r, \omega)}{\frac{dr}{d\omega}} - \phi(r, \omega) \frac{\frac{d^2 r}{d\omega^2}}{\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2} \right] \frac{d\omega}{ds},$$

$\phi'_\omega(r, \omega)$ représentant la dérivée de $\phi(r, \omega)$ relative à ω . D'ailleurs

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{\sin i}{\phi(r, \omega)}.$$

Substituant et multipliant par $\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2$, nous aurons

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 \phi'_r(r, \omega) + \frac{dr}{d\omega} \phi'_\omega(r, \omega) - \phi(r, \omega) \frac{d^2 r}{d\omega^2} \\ &= -\phi'_r(r, \omega) \left[\phi(r, \omega)^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 \right], \end{aligned}$$

ou bien

$$\phi(r, \omega) \frac{d^2 r}{d\omega^2} - 2\phi'_r(r, \omega) \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - \phi'_\omega(r, \omega) \frac{dr}{d\omega} - \phi'_r(r, \omega) \phi(r, \omega)^2 = 0.$$

62. On pourra aussi appliquer quelquefois avec avantage les formules qui précèdent à la solution des problèmes de dynamique. En effet, les équations de la mécanique analytique ou celles de M. Jacobi prennent une forme assez simple dans le cas de notre système de coordonnées. Je me bornerai à faire voir qu'on peut arriver, par l'emploi de ces coordonnées, à une généralisation assez curieuse d'un théorème de M. Jacobi, relatif au mouvement d'un point sur une surface de révolution.

Considérons le mouvement sur la surface proposée, d'un point sollicité par une force constamment située dans le plan osculateur des lignes géodésiques issues du point A ; décomposons cette force en deux : l'une normale à la surface, et l'autre située dans son plan tangent ; soit R cette dernière composante, qui est évidemment, d'après notre hypothèse, constamment tangente à une ligne géodésique issue du point A : les formules de la mécanique analytique nous donneront, pour déterminer le mouvement, les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= K \frac{dK}{dr} \frac{d\omega^2}{dt^2} + R, \\ \frac{d\left(K^2 \frac{d\omega}{dt}\right)}{dt} &= K \frac{dK}{d\omega} \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2. \end{aligned}$$

Nous conservons les mêmes notations qu'aux n^{os} 59 et 60, et t comme toujours représente le temps.

Interprétons la première équation qui représente en quelque sorte le mouvement sur les lignes géodésiques issues du point A; elle nous montre que le point considéré descend sur ces lignes comme un second point qui ne quitterait pas l'une d'elles et qui serait soumis aux deux forces R et $K \frac{dK}{dr} \frac{d\omega^2}{dt^2}$. La première de ces forces est la composante suivant la tangente à la courbe géodésique coordonnée de la force donnée; occupons-nous de l'autre. On a

$$\delta x = K d\omega,$$

d'où

$$\frac{d\delta x}{dr} = \frac{d(K d\omega)}{dr} = \delta x \frac{\cos \theta}{\rho},$$

$\frac{\cos \theta}{\rho}$ étant, comme plus haut, la première courbure géodésique des lignes coordonnées telles que MH; par conséquent,

$$K \frac{dK}{dr} \frac{d\omega^2}{dt^2} = \frac{\partial x^2}{dt^2} \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

Or $\frac{\partial x^2}{dt^2}$ est le carré de la vitesse avec laquelle le mobile s'éloigne à chaque instant de la ligne géodésique issue du point A sur laquelle il se trouve; $\frac{\partial x^2}{dt^2} \frac{\cos \theta}{\rho}$ est donc la force dirigée suivant la ligne géodésique qui produirait ce mouvement perpendiculaire à la ligne géodésique. D'après cela, on voit que *le mobile s'éloigne du point A suivant la même loi qu'un second mobile qui se mouvrait sur une ligne géodésique issue de ce point et qui serait sollicité par la composante suivant la surface de la force agissante sur le premier mobile, augmenté de la force tangente aux lignes géodésiques issues du point A qui produirait à chaque instant le mouvement effectif du point perpendiculaire à ces lignes géodésiques.*

Ce théorème, quand la surface considérée est de révolution, rentre dans celui que l'on doit à M. Jacobi et dont nous avons parlé plus haut. (Voyez le Journal de M. Crelle, tome XXI.)

63. Les formules établies dans le n^o 61 sont surtout simples et commodes quand la surface considérée est de révolution, et que l'on prend pour le

point A le sommet de cette surface. Dans ce cas, en effet, les lignes géodésiques issues de l'origine A sont les méridiens de la surface de révolution, et alors K est égal à l'ordonnée du méridien et ne dépend que de r ; la courbure géodésique des trajectoires orthogonales des méridiens est dès lors aussi indépendante de ω , etc. Du reste, on a souvent employé, comme l'on sait, dans les recherches relatives aux lignes tracées sur les surfaces de révolution, la considération des méridiens et de leurs trajectoires orthogonales ou des parallèles. Sans entrer à ce sujet dans de grands développements, montrons comment on peut s'en servir pour trouver l'équation connue des lignes géodésiques. Dans le cas que nous considérons, on a, comme on le voit aisément,

$$\cos \theta = \frac{d\rho}{dr} = \frac{d\rho}{ds \cos i};$$

l'équation générale

$$\frac{di}{ds} = - \frac{\cos \theta}{\rho} \sin i$$

des lignes géodésiques devient donc

$$di = - \frac{\sin i d\rho}{\rho \cos i},$$

d'où, en intégrant,

$$\rho \sin i = \text{const.},$$

ou bien

$$\frac{\rho^2 d\omega}{ds} = \text{const.};$$

ce qui est l'équation connue, que l'on peut encore intégrer une fois bien simplement.

64. Au lieu de prendre, comme nous l'avons fait plus haut, des lignes géodésiques issues d'un même point, nous aurions pu mener ces lignes par les différents points d'une courbe quelconque tracée sur la surface, et perpendiculairement à cette courbe : les lignes géodésiques ainsi obtenues et leurs trajectoires orthogonales nous auraient conduit, à peu de chose près, aux mêmes résultats que les deux systèmes précédents de lignes orthogonales. Ainsi, pour avoir l'élément δx des trajectoires orthogonales des lignes géodésiques, nous aurions eu encore à intégrer l'équation différentielle du second ordre,

$$\frac{d^2 \delta x}{dr^2} = - \frac{\delta x}{RR'};$$

seulement les constantes, au lieu de se déterminer par les conditions $\delta x = 0$ et $\frac{d \delta x}{dr} = d\omega$ pour $r = 0$, auraient été connues en remarquant que, pour cette hypothèse, δx et $\frac{d \delta x}{dr}$ sont respectivement l'élément de la courbe origine des lignes géodésiques, et le produit de l'élément par la première courbure géodésique de cette courbe. De même on aurait eu pour la courbure géodésique des trajectoires orthogonales des courbes géodésiques,

$$\frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{d \delta x}{dr \delta x},$$

etc.

65. Cette simple remarque fait comprendre qu'il peut exister des surfaces autres que les surfaces de révolution et présentant les mêmes facilités que ces dernières dans l'étude des propriétés des lignes qu'on peut tracer sur elles; il suffit, en effet, qu'en prenant pour l'un des systèmes de lignes orthogonales coordonnées, les lignes géodésiques menées des différents points d'une certaine courbe tracée sur la surface, et perpendiculairement à cette courbe, on obtienne pour l'élément δx des trajectoires orthogonales de ces lignes géodésiques une fonction de r seulement. C'est ce qui arrive pour l'hélicoïde gauche par exemple. Si l'on prend pour origine des lignes géodésiques la directrice rectiligne, ces lignes géodésiques seront précisément les génératrices rectilignes de la surface. Or, appelant 2π le pas de l'hélice qui sert de seconde directrice à la surface, π étant comme à l'ordinaire le rapport d'une circonférence à son diamètre; l'angle des deux génératrices infiniment voisines AM , $A'M'$ (*fig. 23*) répondant aux deux points quelconques A et A' situés respectivement à des distances s et $s + ds$ du point fixe O , et par conséquent le produit par ds de la courbure de la surface au point A , abstraction faite du signe, sera, d'après le n° 51, égale à ds : donc, puisque OAA' est la ligne de striction, on aura pour le point quelconque M , tel que $AM = r$,

$$\frac{1}{RR'} = - \frac{1}{(n^2 + 1)^2},$$

d'après le n° 50, et en remarquant que les deux rayons de courbure R et R' sont de signes contraires.

De là on déduit, pour déterminer l'élément MM' perpendiculaire à AM , l'équation

$$\frac{d^2 \delta x}{dr^2} = \frac{\delta x}{(r^2 + 1)^2},$$

ou mieux, en employant la troisième formule du n° 50, qui n'est autre chose qu'une intégrale première de l'équation précédente,

$$\frac{d \delta x}{dr} = \frac{r \delta x}{r^2 + 1},$$

d'où, en intégrant,

$$\delta x = c \sqrt{r^2 + 1},$$

et comme pour $r = 0$, $dr = ds$,

$$\delta x = ds \sqrt{r^2 + 1}.$$

On voit que cet élément ne dépend que de r ; il en est, par conséquent, de même de la première courbure géodésique des trajectoires orthogonales des lignes géodésiques coordonnées, qui est égale à $\frac{d \delta x}{\delta x dr}$, etc. Ceci explique la simplicité des résultats que l'on obtient dans les problèmes géométriques et mécaniques relatifs à l'hélicoïde gauche, simplicité qui a été mise en évidence par M. Catalan, dans un Mémoire sur les surfaces gauches, inséré dans le XXIX^e cahier de ce *Journal*, et plus récemment par M. Liouville, dans son Mémoire sur quelques cas particuliers du mouvement d'un point qui se ramènent aux quadratures.

66. On peut remarquer que la surface de révolution pour laquelle la courbure varierait suivant un méridien, comme elle varie pour l'hélicoïde gauche suivant les génératrices rectilignes, a pour méridien une chaînette. C'est ce que l'on trouvera aisément.

§ VI. — *Conditions pour que deux portions de surfaces puissent s'appliquer l'une sur l'autre sans qu'il en résulte de déchirure ni de duplication.*

67. Considérons une portion de surface terminée au contour NPS (*fig. 24*). Prenons un point A sur cette surface, et par ce point menons des lignes géodésiques dans toutes les directions; soient r la distance variable du point A

au point quelconque M de la ligne géodésique AQ, et ω l'angle que fait la tangente au point A à cette ligne AQ, avec la tangente à la ligne géodésique fixe AB. Considérons en second lieu une autre portion de surface terminée au contour N'P'S'. Prenons le point A' sur cette surface, et par ce point menons aussi des lignes géodésiques dans toutes les directions; soient r' la distance au point A' d'un point quelconque M' de la ligne géodésique A'Q', et ω' l'angle que font les tangentes au point A' des deux lignes géodésiques A'Q' et A'B', dont la seconde est supposée fixe et déterminée. Il est clair que si les surfaces considérées sont telles que pour les points renfermés dans les contours NPS et N'P'S', et pour lesquels $r = r'$, $\omega = \omega'$, les courbures de ces surfaces soient les mêmes, une courbe fermée quelconque tracée sur la première portion de surface, et ayant pour équation

$$r = f(\omega),$$

aura la même longueur et comprendra la même aire que la courbe représentée par l'équation

$$r' = f(\omega'),$$

qui sera tracée sur la seconde portion de surface: cela résulte des formules établies aux nos 60 et 61. D'après cela, il est évident que *de cette condition de l'égalité des courbures aux points pour lesquels $r = r'$, $\omega = \omega'$, on peut toujours conclure que les deux portions de surface considérées peuvent s'appliquer l'une sur l'autre sans qu'il en résulte ni déchirure ni duplication.*

La réciproque est vraie aussi: *Si deux portions de surfaces peuvent s'appliquer l'une sur l'autre, il arrivera toujours qu'après avoir pris un point A sur la première surface, il sera possible d'en trouver un autre A' sur la seconde surface, de façon qu'en déterminant au moyen de ces points, et comme dans le numéro précédent, les coordonnées r , ω , r' , ω' , les courbures des surfaces soient les mêmes aux points pour lesquels on aura*

$$r = r', \quad \omega = \omega',$$

et qui seront compris d'ailleurs dans les portions de surfaces que l'on considère.

68. Pour le faire voir, nous démontrerons d'abord les deux propriétés suivantes :

1°. *Quand deux portions de surfaces peuvent être développées l'une sur l'autre, les courbures des surfaces pour deux points correspondants sont égales.*

En effet, traçons sur la première portion de surface deux systèmes de lignes orthogonales quelconques ; les transformées de ces lignes sur l'autre portion de surface seront aussi deux systèmes de lignes orthogonales. Appliquons maintenant à chacun de ces couples de systèmes de lignes orthogonales la formule (14) démontrée au n° 40 ; on obtiendra deux égalités dont les premiers membres auront la même valeur quand on considérera des points correspondants : il en sera donc de même des seconds membres de ces égalités ; donc les courbures sont bien les mêmes pour des points correspondants.

2°. *Étant données deux portions de surfaces développables l'une sur l'autre, si l'on trace une ligne quelconque sur la première, et la transformée de cette ligne sur la seconde, la valeur de la première courbure géodésique $\frac{\cos \theta}{\rho}$ sera la même pour les deux courbes aux points correspondants.*

Il suffit, comme dans la démonstration précédente, de prendre deux systèmes de lignes orthogonales sur la première surface et les développées de ces lignes sur la seconde surface, ce qui fournit deux nouveaux systèmes de lignes orthogonales ; et puis d'appliquer la formule (7) du n° 29.

69. De ces deux propriétés résulte évidemment la réciproque que nous voulons établir. En effet, prenons pour A' le point correspondant de A ; les transformées des lignes géodésiques tracées sur la première surface et issues de A, seront évidemment, d'après la seconde propriété, les lignes géodésiques issues de A' et tracées sur la seconde portion de surface : de plus, si on choisit pour A'B' la développée de AB, les points pour lesquels on aura

$$r = r', \quad \omega = \omega',$$

seront des points correspondants ; donc, d'après la première propriété, les deux surfaces auront la même courbure en ces points. Ce qui prouve la proposition que nous avons en vue.

70. La condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces puissent se développer l'une sur l'autre, que nous venons d'obtenir, est très-simple

et très-nette ; mais elle ne pourrait pas aisément servir à reconnaître si deux surfaces données par leurs équations sont développables l'une sur l'autre. Nous allons indiquer une autre condition plus apte à remplir ce but.

Traçons sur la première portion de surface la série des lignes pour lesquelles la courbure de la surface $\frac{1}{\sqrt{RR'}}$ a la même valeur, et que nous appellerons, pour simplifier, les *lignes d'égale courbure*. Supposons, en outre, ces lignes espacées de telle sorte que la courbure de la surface varie toujours de la même quantité quand on passe de l'une quelconque d'entre elles à la suivante. Traçons les lignes analogues sur la seconde portion de surface, en ayant soin qu'elles correspondent à des valeurs de la courbure égales respectivement à celles qui ont déterminé les lignes tracées sur la première portion de surface. Enfin imaginons sur chaque portion de surface les trajectoires orthogonales de ses lignes d'égale courbure. Ceci posé, soit (*fig. 25*), sur une des lignes AM d'égale courbure tracées sur la première surface, un point quelconque A ; *les deux surfaces seront développables l'une sur l'autre lorsqu'il sera possible de trouver sur celle des lignes d'égale courbure tracée sur la seconde surface qui correspond à la même valeur de la courbure que AM, un point A' tel, qu'après avoir pris les points M, M' de façon que les arcs AM et AM' soient égaux, mais quelconques d'ailleurs : 1° les courbures géodésiques des deux courbes AM et AM' soient en M et M' égales entre elles ; 2° les distances MM₁, M₁M₂, etc., qui existent entre les différentes lignes d'égale courbure de la première surface et qui sont déterminées par la trajectoire orthogonale de ces lignes qui passe par le point M, soient égales respectivement aux distances M'M₁, M₁M₂ des lignes d'égale courbure de la seconde surface qui sont déterminées par la trajectoire orthogonale passant par M. Comme aussi réciproquement, quand il sera possible de satisfaire à ces conditions, les deux surfaces seront applicables l'une sur l'autre.* Cela est presque évident ; en effet, prenons sur AM, et à la suite les uns des autres, les arcs infiniment petits Aa, ab, bc, etc., puis sur la ligne A'M' les arcs A'a', a'b', etc., respectivement égaux à Aa, ab, etc., et enfin menons AA₁, aa₁, bb₁, etc., normalement à AM, et A'A'₁, a'a'₁, b'b'₁, etc., normalement à A'M'. Si les normales A'A'₁, a'a'₁, b'b'₁, etc., sont respectivement égales à AA₁, aa₁, bb₁, et que les valeurs des courbures

géodésiques des lignes AM et $A'M'$ soient respectivement les mêmes au point A et au point A' , au point a et au point a' , au point b et au point b' , etc., $A_1 a_1$, $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, etc., seront respectivement égaux à $A_1 a_1$, $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, etc., d'après la formule (7) du n° 29, et les valeurs des courbures géodésiques des lignes $A_1 M_1$, $A'_1 M'_1$ seront respectivement les mêmes aux points A'_1 et A_1 , a'_1 et a_1 , b'_1 et b_1 , etc., d'après la formule (12) du n° 38; donc, en menant $A_1 A_2$, $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, etc., normalement à $A_1 M_1$ et $A'_1 A'_2$, $a'_1 a'_2$, $b'_1 b'_2$, etc., normalement à $A'_1 M'_1$, les éléments $A'_2 a'_2$, $a'_2 b'_2$, $b'_2 c'_2$, etc., seront de même respectivement égaux à $A_2 a_2$, $a_2 b_2$, $b_2 c_2$, etc., et les valeurs des courbures géodésiques des lignes $A_2 M_2$ et $A'_2 M'_2$ seront aussi respectivement les mêmes pour les points A'_2 et A_2 , a'_2 et a_2 , b'_2 et b_2 , etc. D'après cela, il est bien évident que les deux surfaces peuvent s'appliquer l'une sur l'autre et que les points correspondants sont généralement ceux qui, par les notations précédentes, sont désignés par h_n , h_n^1 .

La réciproque s'aperçoit aussi aisément d'après les deux propriétés démontrées plus haut, et il n'est pas nécessaire de s'y arrêter.

71. Voyons maintenant comment on pourra s'assurer si deux surfaces données par leurs équations peuvent ou non se développer l'une sur l'autre. Nous considérons toujours, dans ce qui va suivre, les coordonnées des différents points de chaque surface comme déterminées au moyen de deux variables indépendantes u et v , de telle sorte que chaque surface sera définie par trois équations de la forme

$$x = f(u, v), \quad y = f_1(u, v), \quad z = f_2(u, v),$$

d'où l'on pourra ensuite exprimer en u et v , telle fonction de x , y , z que l'on voudra.

Dans cette hypothèse, quand on supposera à u une valeur déterminée, et qu'on fera varier v , les équations de la surface détermineront une courbe tracée sur cette surface, dont les questions en x , y , z s'obtiendraient en éliminant v entre les trois équations précédentes. De même l'hypothèse de $v = \text{const.}$ donnera une autre ligne tracée sur la surface; d'après cela, on voit que les deux équations

$$u = c \quad \text{et} \quad v = c',$$

où c et c' sont des constantes quelconques, représentent, considérées isolément, deux systèmes de courbes tracées sur la surface et qui peuvent servir par leurs intersections à déterminer les différents points de cette surface; nous appellerons pour cette raison les lignes dont il s'agit, les *lignes coordonnées*.

72. Si l'on différentie les trois équations de la surface, il vient

$$dx = a du + b dv,$$

$$dy = a_1 du + b_1 dv,$$

$$dz = a_2 du + b_2 dv,$$

en posant, pour simplifier,

$$a = \frac{df}{du}, \quad b = \frac{df}{dv}, \quad a_1 = \frac{df_1}{du}, \quad b_1 = \frac{df_1}{dv}, \quad a_2 = \frac{df_2}{du}, \quad b_2 = \frac{df_2}{dv}.$$

De là on tire, pour la différentielle de l'arc d'une courbe quelconque tracée sur la surface,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(a^2 + a_1^2 + a_2^2) du^2 + 2(ab + a_1 b_1 + a_2 b_2) du dv + (b^2 + b_1^2 + b_2^2) dv^2}$$

ou

$$ds = \sqrt{A^2 du^2 + 2B^2 du dv + C^2 dv^2},$$

en posant, pour simplifier

$$a^2 + a_1^2 + a_2^2 = A^2,$$

$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 = B^2,$$

$$b^2 + b_1^2 + b_2^2 = C^2.$$

A, B, C sont susceptibles d'une interprétation géométrique très-simple. En effet, dans l'expression générale de ds , que nous venons d'obtenir, faisons $dv = 0$; il viendra

$$ds = A du,$$

en supposant que A soit la valeur positive de $\sqrt{A^2}$. Or, poser $dv = 0$, c'est admettre que la courbe dont on calcule l'élément est une ligne coordonnée représentée par une équation de la forme $v = \text{const.}$; nous voyons donc que $A du$ est l'expression générale de l'arc infiniment petit de la ligne coordonnée représentée par l'équation $v = \text{const.}$, déterminé d'ailleurs par

deux courbes coordonnées de l'autre système, et répondant à deux valeurs de u ayant entre elles une différence égale à du . On verrait de même que Cdv est l'expression générale de l'arc infiniment petit de la ligne coordonnée $v = \text{const.}$, que déterminent deux courbes coordonnées de l'autre système répondant à deux valeurs de v dont la différence est dv . D'un autre côté, si dx et dy représentent ces deux arcs infiniment et que θ soit l'angle qu'ils forment, on doit avoir pour l'expression de l'arc d'une courbe quelconque tracée sur la surface,

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + 2 dx dy \cos \theta};$$

comparant à la valeur de ds écrite plus haut, on voit que

$$\frac{B^2}{AC} = \cos \theta,$$

d'où

$$B^2 = AC \cos \theta.$$

Ces résultats nous seront utiles plus tard.

73. Soient maintenant deux surfaces, la première représentée par les trois équations

$$x = f(u, v), \quad y = f_1(u, v), \quad z = f_2(u, v),$$

la seconde par

$$x' = \phi(u', v'), \quad y' = \phi_1(u', v'), \quad z' = \phi_2(u', v').$$

Je commencerai par calculer, pour chacune d'elles, le carré de la courbure $\frac{1}{RR'}$ en fonction des variables u, v ou u', v' qui servent à déterminer leurs différents points. Or on a, comme l'on sait,

$$\frac{1}{RR'} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

ou

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2 z}{dx dy}, \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2},$$

s'il s'agit de la première surface, et

$$p = \frac{dz'}{dx'}, \quad q = \frac{dz'}{dy'}, \quad r = \frac{d^2 z'}{dx'^2}, \quad s = \frac{d^2 z'}{dx' dy'}, \quad t = \frac{d^2 z'}{dy'^2},$$

s'il s'agit de la seconde. D'un autre côté, z, x, y sont connus en fonction

de u et de v , et z' , x' , y' en fonction de u' , v' ; on peut donc avoir par les règles connues p , q , r , s , t , et, par suite, le carré de la courbure $\frac{1}{RR'}$, en fonction de u et de v quand il s'agit de la première surface, et en fonction de u' et v' quand il s'agit de la seconde. Nous allons effectuer ce calcul qui n'offre d'autres difficultés que sa longueur, pour la première surface; et l'on verra, ce qui est fort remarquable, que le résultat ne dépend que des quantités A , B , C dont il a été parlé plus haut, et de leurs dérivées premières et secondes relatives à u et à v .

74. Reprenons les égalités

$$(a) \quad \begin{cases} dx = a du + b dv, \\ dy = a_1 du + b_1 dv, \\ dz = a_2 du + b_2 dv, \end{cases}$$

et différencions-les par rapport aux variables u et v , que l'on considérera comme variables indépendantes; il viendra

$$(b) \quad \begin{cases} d^2 x = \frac{da}{du} du^2 + 2 \frac{da}{dv} du dv + \frac{db}{dv} dv^2, \\ d^2 y = \frac{da_1}{du} du^2 + 2 \frac{da_1}{dv} du dv + \frac{db_1}{dv} dv^2, \\ d^2 z = \frac{da_2}{du} du^2 + 2 \frac{da_2}{dv} du dv + \frac{db_2}{dv} dv^2, \end{cases}$$

en remarquant que

$$\frac{da}{dv} = \frac{db}{du} = \frac{d^2 x}{du dv},$$

$$\frac{da_1}{dv} = \frac{db_1}{du} = \frac{d^2 y}{du dv},$$

$$\frac{da_2}{dv} = \frac{db_2}{du} = \frac{d^2 z}{du dv}.$$

Maintenant on a

$$dz = p dx + q dy,$$

$$d^2 z = p d^2 x + q d^2 y + r dx^2 + 2 s dx dy + t dy^2.$$

Donc, en substituant à dx , dy , dz , $d^2 x$, $d^2 y$, $d^2 z$ leurs valeurs déduites des égalités (a) et (b), et égalant séparément les coefficients de du , dv , du^2 , $du dv$ et dv^2 , ce qui est permis, puisque les différentielles du et dv sont indé-

pendantes l'une de l'autre, il vient

$$\begin{aligned} a_2 &= pa + qa_1, \\ b_2 &= pb + qb_1, \\ \frac{da_2}{du} &= p \frac{da}{du} + q \frac{da_1}{du} + ra^2 + 2saa_1 + ta_1^2, \\ \frac{da_2}{dv} &= \frac{db_2}{du} = p \frac{da}{dv} + q \frac{da_1}{dv} + rab + s(ab_1 + ba_1) + ta_1b_1, \\ \frac{db_2}{dv} &= p \frac{db}{dv} + q \frac{db_1}{dv} + rb^2 + 2sbb_1 + tb_1^2. \end{aligned}$$

Des deux premières de ces égalités on tire aisément

$$\begin{aligned} p &= \frac{a_2b_1 - b_2a_1}{ab_1 - ba_1}, \\ q &= \frac{ab_2 - ba_2}{ab_1 - ba_1}, \end{aligned}$$

d'où, en substituant dans les trois autres et transposant quelques termes d'un membre dans un autre, on a

$$\begin{aligned} ra^2 + 2saa_1 + ta_1^2 &= \frac{da_2}{du} - \frac{a_2b_1 - b_2a_1}{ab_1 - ba_1} \frac{da}{du} - \frac{ab_2 - ba_2}{ab_1 - ba_1} \frac{da_1}{du}, \\ rab + s(ab_1 + ba_1) + ta_1b_1 &= \frac{da_2}{dv} - \frac{a_2b_1 - b_2a_1}{ab_1 - ba_1} \frac{da}{dv} - \frac{ab_2 - ba_2}{ab_1 - ba_1} \frac{da_1}{dv}, \\ rb^2 + 2sbb_1 + tb_1^2 &= \frac{db_2}{dv} - \frac{a_2b_1 - b_2a_1}{ab_1 - ba_1} \frac{db}{dv} - \frac{ab_2 - ba_2}{ab_1 - ba_1} \frac{db_1}{dv}. \end{aligned}$$

Chassant les dénominateurs, multipliant membre à membre les équations extrêmes, et du produit retranchant le carré de la seconde, il viendra, comme on le voit, sans difficulté

$$(ab_1 - ba_1)^2 (rt - s^2) = GK - H^2,$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} G &= (a_1b_2 - b_1a_2) \frac{da}{du} + (a_2b - b_2a) \frac{da_1}{du} + (ab_1 - ba_1) \frac{da_2}{du}, \\ H &= (a_1b_2 - b_1a_2) \frac{da}{dv} + (a_2b - b_2a) \frac{da_1}{dv} + (ab_1 - ba_1) \frac{da_2}{dv}, \\ K &= (a_1b_2 - b_1a_2) \frac{db}{dv} + (a_2b - b_2a) \frac{db_1}{dv} + (ab_1 - ba_1) \frac{db_2}{dv}. \end{aligned}$$

Reste maintenant à déterminer $GK - H^2$ en fonction de u et de v , ou plutôt en fonction de A^2 , B^2 , C^2 et des dérivées de ces quantités par rapport à u et à v . Reprenons les égalités

$$\begin{aligned} a^2 + a_1^2 + a_2^2 &= A^2, \\ ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 &= B^2, \\ b^2 + b_1^2 + b_2^2 &= C^2; \end{aligned}$$

en les différentiant successivement par rapport à u et à v , et remarquant, comme on l'a dit plus haut, que

$$\frac{da}{dv} = \frac{db}{du}, \quad \frac{da_1}{dv} = \frac{db_1}{du}, \quad \frac{da_2}{dv} = \frac{db_2}{du},$$

on obtiendra facilement les six équations

$$\begin{aligned} a \frac{da}{du} + a_1 \frac{da_1}{du} + a_2 \frac{da_2}{du} &= A \frac{dA}{du} = D, \\ a \frac{da}{dv} + a_1 \frac{da_1}{dv} + a_2 \frac{da_2}{dv} &= A \frac{dA}{dv} = E, \\ a \frac{db}{dv} + a_1 \frac{db_1}{dv} + a_2 \frac{db_2}{dv} &= 2B \frac{dB}{dv} - C \frac{dC}{du} = F, \\ b \frac{da}{du} + b_1 \frac{da_1}{du} + b_2 \frac{da_2}{du} &= 2B \frac{dB}{du} - A \frac{dA}{dv} = D_1, \\ b \frac{da}{dv} + b_1 \frac{da_1}{dv} + b_2 \frac{da_2}{dv} &= C \frac{dC}{du} = E_1, \\ b \frac{db}{dv} + b_1 \frac{db_1}{dv} + b_2 \frac{db_2}{dv} &= C \frac{dC}{dv} = F_1. \end{aligned}$$

De là on tire aisément, en éliminant successivement $\frac{da}{du}$, $\frac{da_1}{du}$ et $\frac{da_2}{du}$ entre la première et la quatrième de ces équations,

$$\begin{aligned} (a_1 b - b_1 a) \frac{da_1}{du} + (a_2 b - b_2 a) \frac{da_2}{du} &= Db - D_1 a, \\ (a_2 b_1 - b_2 a_1) \frac{da_2}{du} + (ab_1 - ba_1) \frac{da}{du} &= Db_1 - D_1 a_1, \\ (ab_2 - ba_2) \frac{da}{du} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \frac{da_1}{du} &= Db_2 - D_1 a_2. \end{aligned}$$

De même, en éliminant successivement $\frac{da}{dv}$, $\frac{da_1}{dv}$, $\frac{da_2}{dv}$ entre la deuxième et la

cinquième, et $\frac{db}{dv}$, $\frac{db_1}{dv}$, $\frac{db_2}{dv}$ entre la troisième et la sixième des mêmes équations, il vient

$$\begin{aligned}(a, b - b_1 a) \frac{da_1}{dv} + (a_2 b - b_2 a) \frac{da_2}{dv} &= Eb - E, a, \\(a_2 b_1 - b_2 a_1) \frac{da_2}{dv} + (ab_1 - ba_1) \frac{da}{dv} &= Eb_1 - E, a_1, \\(ab_2 - ba_2) \frac{da}{dv} + (a, b_2 - b, a_2) \frac{da_1}{dv} &= Eb_2 - E, a_2, \\(a, b - b, a) \frac{db_1}{dv} + (a_2 b - b_2 a) \frac{db_2}{dv} &= Fb - F, a, \\(a_2 b_1 - b_2 a_1) \frac{db_2}{dv} + (ab_1 - ba_1) \frac{db}{dv} &= Fb_1 - F, a_1, \\(ab_2 - ba_2) \frac{db}{dv} + (a, b_2 - b, a_2) \frac{db_1}{dv} &= Fb_2 - F, b_2;\end{aligned}$$

mais $GK - H^2$, par un artifice bien connu et fort simple, peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned}&[(ab_1 - ba_1)^2 + (a, b_1 - b, a_1)^2 + (a_2 b - b_2 a)^2] \left[\frac{da}{du} \frac{db}{dv} - \left(\frac{da}{dv} \right)^2 + \frac{da_1}{du} \frac{db_1}{dv} - \left(\frac{da_1}{dv} \right)^2 + \frac{da_2}{du} \frac{db_2}{dv} - \left(\frac{da_2}{dv} \right)^2 \right] \\&- \left[(ab_2 - ba_2) \frac{da}{du} + (a, b_2 - b, a_2) \frac{da_1}{du} \right] \left[(ab_2 - ba_2) \frac{db}{dv} + (a, b_2 - b, a_2) \frac{db_1}{dv} \right] \\&+ \left[(ab_2 - ba_2) \frac{da}{dv} + (a, b_2 - b, a_2) \frac{da_1}{dv} \right]^2 \\&- \left[(a, b - b, a) \frac{da_1}{du} + (a_2 b - b_2 a) \frac{da_2}{du} \right] \left[(a, b - b, a) \frac{db_1}{dv} + (a_2 b - b_2 a) \frac{db_2}{dv} \right] \\&+ \left[(a, b - b, a) \frac{da_1}{dv} + (a_2 b - b_2 a) \frac{da_2}{dv} \right]^2 \\&- \left[(a_2 b_1 - b_2 a_1) \frac{da_2}{du} + (ab_1 - ba_1) \frac{da}{du} \right] \left[(a_2 b_1 - b_2 a_1) \frac{db_2}{dv} + (ab_1 - ba_1) \frac{db}{dv} \right] \\&+ \left[(a_2 b_1 - b_2 a_1) \frac{da_2}{dv} + (ab_1 - ba_1) \frac{da}{dv} \right]^2.\end{aligned}$$

Donc, en remarquant que

$$\begin{aligned}&\frac{da}{du} \frac{db}{dv} - \left(\frac{da}{dv} \right)^2 + \frac{da_1}{du} \frac{db_1}{dv} - \left(\frac{da_1}{dv} \right)^2 + \frac{da_2}{du} \frac{db_2}{dv} - \left(\frac{da_2}{dv} \right)^2 \\&= \frac{d \left(a \frac{db}{dv} + a_1 \frac{db_1}{dv} + a_2 \frac{db_2}{dv} \right)}{du} - \frac{d \left(a \frac{da}{dv} + a_1 \frac{da_1}{dv} + a_2 \frac{da_2}{dv} \right)}{dv} = \frac{dF}{du} - \frac{dE}{dv},\end{aligned}$$

et en se servant des formules précédentes, il vient

$$\begin{aligned} \text{GK} - \text{H}^2 &= [(ab_1 - ba_1)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_2b - b_2a)^2] \left(\frac{dF}{du} - \frac{dE}{dv} \right) \\ &\quad - (Db_2 - D_1a_2)(Fb_2 - F_1a_2) + (Eb_2 - E_1a_2)^2 \\ &\quad - (Db - D_1a)(Fb - F_1a) + (Eb - E_1a)^2 \\ &\quad - (Db_1 - D_1a_1)(Fb_1 - F_1a_1) + (Eb_1 - E_1a_1)^2 \\ &= [(ab_1 - ba_1)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_2b - b_2a)^2] \left(\frac{dF}{du} - \frac{dE}{dv} \right) \\ &\quad + (E^2 - DF)C^2 + (E_1^2 - D_1F_1)A^2 - (2EE_1 - DF_1 - D_1F)B^2. \end{aligned}$$

Or

$$(ab_1 - ba_1)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_2b - b_2a)^2 = A^2C^2 - B^4;$$

on a donc encore

$$\begin{aligned} \text{GK} - \text{H}^2 &= (A^2C^2 - B^4) \left(\frac{dF}{du} - \frac{dE}{dv} \right) + (E^2 - DF)C^2 \\ &\quad + (E_1^2 - D_1F_1)A^2 - (2EE_1 - DF_1 - D_1F)B^2. \end{aligned}$$

D'un autre côté, puisque, ainsi qu'on l'a trouvé plus haut,

$$p = \frac{a_1b_1 - b_1a_1}{ab_1 - ba_1}, \quad q = \frac{ab_2 - ba_2}{ab_1 - ba_1},$$

on a

$$(1 + p^2 + q^2)^2 = \frac{[(ab_1 - ba_1)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_2b - b_2a)^2]^2}{(ab_1 - ba_1)^4} = \frac{(A^2C^2 - B^4)^2}{(ab_1 - ba_1)^4};$$

donc le carré de la courbure

$$\frac{1}{RR'} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{\text{GK} - \text{H}^2}{(A^2C^2 - B^4)^2},$$

sera égal à

$$\frac{(A^2C^2 - B^4) \left(\frac{dF}{du} - \frac{dE}{dv} \right) + (E^2 - DF)C^2 + (E_1^2 - D_1F_1)A^2 - (2EE_1 - DF_1 - D_1F)B^2}{(A^2C^2 - B^4)^2},$$

ou bien, en substituant à D, E, F, D₁, E₁, F₁, leurs valeurs, à

$$\begin{aligned} &\frac{(A^2C^2 - B^4) \left(\frac{d^2B^2}{du dv} - \frac{1}{2} \frac{d^2C^2}{du^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2A^2}{dv^2} \right) + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{dA^2}{dv} \right)^2 - 2 \frac{dA^2}{du} \frac{dB^2}{dv} + \frac{dA^2}{du} \frac{dC^2}{du} \right] C^2}{(A^2C^2 - B^4)^2} \\ &+ \frac{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{dC^2}{du} \right)^2 - 2 \frac{dB^2}{du} \frac{dC^2}{dv} + \frac{dC^2}{dv} \frac{dA^2}{dv} \right] A^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{dA^2}{dv} \frac{dC^2}{du} - \frac{dA^2}{du} \frac{dC^2}{dv} \right) B^2}{(A^2C^2 - B^4)^2} \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \left(2 \frac{dB^2}{du} \frac{dB^2}{dv} - \frac{dB^2}{du} \frac{dC^2}{du} - \frac{dA^2}{dv} \frac{dB^2}{dv} \right) B^2}{(A^2C^2 - B^4)^2}. \end{aligned}$$

Telle est l'expression du carré de la courbure. On voit qu'elle ne dépend que des fonctions A^2 , B^2 , C^2 et des dérivées premières et secondes relatives à u et à v de ces fonctions. Cette importante proposition est due à M. Gauss, et le calcul qui précède est, à quelques simplifications près, celui que l'on trouve dans le célèbre Mémoire intitulé: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*.

Nous appellerons M cette expression du carré de la courbure de la première surface, et M' l'expression correspondante pour la seconde surface; de manière que

$$M = \text{const.} \quad \text{et} \quad M' = \text{const.}$$

représenteront respectivement les lignes d'égale courbure de la première et de la seconde surface.

75. Proposons-nous actuellement de calculer la distance de deux lignes d'égale courbure infiniment voisines et tracées sur la première surface par exemple. Soient AB et $A'B'$ ces deux lignes (*fig. 26*) et m un point pris sur la première; menons mm' normalement à AmB que nous terminons à $A'B'$: il s'agit de calculer mm' . Appelons u et v les coordonnées curvilignes du point m ; $u + \delta u$, $v + \delta v$ celles de m' , et enfin $u + du$, $v + dv$ celles du point n infiniment voisin de m et situé sur la ligne AB ; nous aurons d'abord la distance

$$mm' = \delta s = \sqrt{A^2 \delta u^2 + 2 B^2 \delta u \delta v + C^2 \delta v^2}.$$

Reste à obtenir δu et δv . Appelons δM l'accroissement que reçoit la courbure de la surface quand on passe de la courbe AB à la courbe $A'B'$; nous aurons

$$\delta M = \frac{dM}{du} \delta u + \frac{dM}{dv} \delta v,$$

puis, en exprimant que mm' est normale à AmB ,

$$1 + \frac{A^2}{C^2} \frac{du \delta u}{dv \delta v} + \frac{A}{C} \left(\frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v} \right) \cos \theta = 0,$$

θ représentant, comme plus haut, l'angle des deux lignes coordonnées; ou bien, en observant que

$$\frac{dM}{du} du + \frac{dM}{dv} dv = 0,$$

d'où
$$\frac{du}{dv} = -\frac{\frac{dM}{dv}}{\frac{dM}{du}},$$

on a
$$1 - \frac{A^2}{C^2} \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\frac{dM}{dv}}{\frac{dM}{du}} + \frac{A}{C} \left(\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\frac{dM}{dv}}{\frac{dM}{du}} \right) \cos \theta = 0,$$

ou en remplaçant $\cos \theta$ par sa valeur,

$$\left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right) - \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \frac{\partial u}{\partial v} = 0.$$

De cette équation et de celle qui a été écrite plus haut, on tire aisément, par un artifice souvent employé par M. Cauchy,

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial v} \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv}}{C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial v} \frac{dM}{du}}{A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du}} = \frac{\frac{\partial M}{\partial v}}{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{\left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right) \delta M}{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2}, \\ \delta v &= \frac{\left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \delta M}{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2}; \end{aligned}$$

d'où, substituant dans la valeur de δs , il vient

$$\begin{aligned} \delta s &= \pm \frac{\delta M \sqrt{A^2 \left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right)^2 + 2 B^2 \left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right) \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) + C^2 \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right)^2}}{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2} \\ &= \pm \frac{\delta M \sqrt{(A^2 C^2 - B^4) \left[C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 \right]}}{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2} \\ &= \pm \delta M \sqrt{\frac{A^2 C^2 - B^4}{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2}}, \end{aligned}$$

le signe du second membre étant évidemment celui de δM , puisque δs est positif. On trouverait évidemment de la même manière la distance $\delta s'$ de

deux courbes d'égale courbure infiniment voisines appartenant à la seconde surface, et l'on aurait

$$\delta s' = \pm \delta M' \sqrt{\frac{A'^2 C'^2 - B'^4}{A'^2 \left(\frac{dM'}{dv'}\right)^2 - 2 B'^2 \frac{dM'}{du'} \frac{dM'}{dv'} + C'^2 \left(\frac{dM'}{du'}\right)^2}},$$

$\delta M'$ étant l'accroissement positif ou négatif de la courbure de la surface, obtenu en passant de la première à la seconde des lignes considérées, et le signe du second membre étant celui de cet accroissement.

76. Calculons encore la courbure géodésique d'une ligne d'égale courbure de la première surface; d'abord, en appelant ds l'élément de la ligne, et représentant par δ les déplacements normaux à cette ligne, cette courbure est égale, abstraction faite du signe, à

$$\frac{\partial ds}{ds \partial s}.$$

Or

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2 B^2 du dv + C^2 dv^2;$$

donc

$$\begin{aligned} ds \delta ds &= A^2 du \delta du + B^2 du \delta dv + B^2 dv \delta du + C^2 dv \delta dv \\ &+ A du^2 \left(\frac{dA}{du} \delta u + \frac{dA}{dv} \delta v \right) + 2 B du dv \left(\frac{dB}{du} \delta u + \frac{dB}{dv} \delta v \right) + C dv^2 \left(\frac{dC}{du} \delta u + \frac{dC}{dv} \delta v \right), \end{aligned}$$

$du, dv, ds, \delta u, \delta v, \delta s$ vérifiant les conditions

$$\frac{dM}{du} du + \frac{dM}{dv} dv = 0,$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{A^2 du^2 + 2 B^2 du dv + C^2 dv^2} \\ &= \pm \frac{du}{\frac{dM}{dv}} \sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2}, \end{aligned}$$

$$\delta u = \frac{\left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right) \delta M}{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2},$$

$$\delta v = \frac{\left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \delta M}{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2},$$

$$\delta s = \pm \frac{\delta M \sqrt{A^2 C^2 - B^4}}{\sqrt{\left(A^2 \frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2}}.$$

Posons maintenant, pour simplifier,

$$\frac{du}{\frac{dM}{dv}} = h, \quad \frac{\partial M}{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2} = k,$$

d'où
$$du = h \frac{dM}{dv}, \quad dv = -h \frac{dM}{du},$$

$$ds = \pm h \sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2},$$

$$\delta u = k \left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right), \quad \delta v = k \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right),$$

$$\delta s = \pm k \sqrt{A^2 C^2 - B^4} \sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2};$$

il viendra, en substituant,

$$\begin{aligned} ds \delta ds &= \left[\left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \delta du + \left(B^2 \frac{dM}{dv} - C^2 \frac{dM}{du} \right) \delta dv \right] h \\ &+ A \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 \left[\frac{dA}{du} \left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right) + \frac{dA}{dv} \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \right] h^2 k \\ &- 2B \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} \left[\frac{dB}{du} \left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right) + \frac{dB}{dv} \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \right] h^2 k \\ &+ C \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \left[\frac{dC}{du} \left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right) + \frac{dC}{dv} \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \right] h^2 k, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} ds \delta ds &= h \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \left\{ \delta du + h k \left[A \frac{dA}{dv} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2B \frac{dB}{dv} \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C \frac{dC}{dv} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right] \right\} \\ &+ h \left(B^2 \frac{dM}{dv} - C^2 \frac{dM}{du} \right) \left\{ \delta dv - h k \left[A \frac{dA}{du} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2B \frac{dB}{du} \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C \frac{dC}{du} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \delta du &= d\delta u = \frac{\partial M d. \left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right)}{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2} \\ &- \frac{\partial M \left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right) d. \left[A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right]}{\left[A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right]^2} \\ &= k d. \left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right) - \frac{k \left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right) d. \left[A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right]}{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2}, \end{aligned}$$

et aussi

$$\delta dv = k d \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) - \frac{k \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) d \left[A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right]}{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2}.$$

Donc, en substituant et simplifiant,

$$\begin{aligned} ds \delta ds = & h k \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \left\{ d \left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv} \right) + h \left[A \frac{dA}{dv} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B \frac{dB}{dv} \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C \frac{dC}{dv} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right] \right\} \\ & + h k \left(B^2 \frac{dM}{dv} - C^2 \frac{dM}{du} \right) \left\{ d \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) - h \left[A \frac{dA}{du} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B \frac{dB}{du} \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C \frac{dC}{du} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

ou, en développant les différentielles et substituant à du et à dv leurs valeurs écrites plus haut,

$$\begin{aligned} ds \delta ds = & h^2 k \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \left[2 C \frac{dC}{du} \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} - C \frac{dC}{dv} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 - 2 B \frac{dB}{du} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 + A \frac{dA}{dv} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 \right. \\ & \left. + C^2 \frac{dM}{dv} \frac{d^2 M}{du^2} - C^2 \frac{dM}{du} \frac{d^2 M}{du dv} - B^2 \frac{dM}{dv} \frac{d^2 M}{du dv} + B^2 \frac{dM}{du} \frac{d^2 M}{dv^2} \right] \\ & + h^2 k \left(B^2 \frac{dM}{dv} - C^2 \frac{dM}{du} \right) \left[A \frac{dA}{du} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 A \frac{dA}{dv} \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + 2 B \frac{dB}{dv} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 - C \frac{dC}{du} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right. \\ & \left. + A^2 \frac{dM}{dv} \frac{d^2 M}{du dv} - A^2 \frac{dM}{du} \frac{d^2 M}{dv^2} - B^2 \frac{dM}{dv} \frac{d^2 M}{du^2} + B^2 \frac{dM}{du} \frac{d^2 M}{du dv} \right]; \end{aligned}$$

d'où enfin, en divisant les deux membres par ds^2 et δs dont les valeurs en fonction de h et de k ont été écrites plus haut, il vient, pour la courbure géodésique demandée,

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{\rho} = & \pm \frac{\left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \left[2 C \frac{dC}{du} \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} - C \frac{dC}{dv} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 - 2 B \frac{dB}{du} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 + A \frac{dA}{dv} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 + C^2 \frac{dM}{dv} \frac{d^2 M}{du^2} - C^2 \frac{dM}{du} \frac{d^2 M}{du dv} - B^2 \frac{dM}{dv} \frac{d^2 M}{du dv} + B^2 \frac{dM}{du} \frac{d^2 M}{dv^2} \right]}{(A^2 C^2 - B^4)^{\frac{1}{2}} \left[A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ = & \frac{\left(B^2 \frac{dM}{dv} - C^2 \frac{dM}{du} \right) \left[A \frac{dA}{du} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 A \frac{dA}{dv} \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + 2 B \frac{dB}{dv} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 - C \frac{dC}{du} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 + A^2 \frac{dM}{dv} \frac{d^2 M}{du dv} - A^2 \frac{dM}{du} \frac{d^2 M}{dv^2} - B^2 \frac{dM}{dv} \frac{d^2 M}{du^2} + B^2 \frac{dM}{du} \frac{d^2 M}{du dv} \right]}{(A^2 C^2 - B^4)^{\frac{1}{2}} \left[A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ou bien encore

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{\rho} = & \pm \frac{\left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right) \left[\frac{dC^2}{du} \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} - \frac{1}{2} \frac{dC^2}{dv} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 - \frac{dB^2}{du^2} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{dA^2}{dv^2} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 \right] + \left(B^2 \frac{dM}{dv} - C^2 \frac{dM}{du} \right) \left[\frac{1}{2} \frac{dA^2}{du} \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - \frac{dA^2}{dv} \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + \frac{dB^2}{dv} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{dC^2}{du} \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right]}{(A^2 C^2 - B^4)^{\frac{1}{2}} \left[A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ & \pm \frac{(A^2 C^2 - B^4)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{dM}{dv} \right)^2 \frac{d^2 M}{du^2} - 2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} \frac{d^2 M}{du dv} + \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \frac{d^2 M}{dv^2} \right]}{\left[A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

Quant aux signes placés devant les deux termes du second membre, on voit que si l'on suppose, ce qui est toujours permis, que M croisse du côté des lignes d'égale courbure où sont situées les normales à ces lignes, qui occupent, par rapport aux tangentes des mêmes lignes prolongées dans le sens des arcs positifs, et aux normales extérieures de la surface, la position ordinaire de la partie positive de l'axe de y par rapport aux parties positives des axes des x et des z , le signe qu'il faudra adopter sera le signe —.

On obtiendrait de la même manière la valeur de la courbure géodésique de la ligne d'égale courbure tracée sur la seconde surface et que nous appellerons $\frac{\cos \theta'}{\rho'}$. Cette valeur ne différerait de la précédente, d'après nos notations, qu'en ce que toutes les lettres seraient accentuées.

77. La formule précédente est assez compliquée ; je remarquerai qu'on la simplifie beaucoup quand on prend pour lignes coordonnées de l'un des systèmes, pour celles par exemple qui sont renfermées dans l'équation

$$\nu = \text{const.},$$

les lignes d'égale courbure. En effet, M peut alors être considéré comme égal à ν , et l'on a

$$\frac{dM}{d\nu} = 1$$

et

$$\frac{dM}{du} = \frac{d^2 M}{du^2} = \frac{d^2 M}{du d\nu} = \frac{d^2 M}{d\nu^2} = 0;$$

par conséquent,

$$\frac{\cos \theta}{\rho} = - \frac{A^2 \frac{dA}{d\nu} - 2AB \frac{dB}{du} + B^2 \frac{dA}{du}}{A^2 (A^2 C^2 - B^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sous ce rapport, il conviendra de considérer x, y, z comme fonction des deux variables indépendantes u et M , en éliminant ν au moyen de la relation qui lie M, u et ν .

78. Ayant calculé $M, \frac{\partial s}{\partial M}, \frac{\cos \theta}{\rho}$ en fonction de u et de ν ; $M', \frac{\partial s'}{\partial M'}, \frac{\cos \theta'}{\rho'}$ en fonction de u' et de ν' , nous exigerons, pour que les deux surfaces soient développables l'une sur l'autre, que l'on puisse déterminer u' et ν' en fonc-

tion de u et de v , de manière que l'on ait en même temps les trois relations

$$(1) \quad M = M', \quad \frac{\partial s}{\partial M} = \frac{\partial s'}{\partial M'}, \quad \frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{\cos \theta'}{\rho'}.$$

Cela étant, si, de plus, l'accroissement de $\frac{\cos \theta}{\rho}$ pour un déplacement infiniment petit effectué sur une courbe d'égale courbure de la première surface dans le sens des arcs positifs de cette courbe, est égal à l'accroissement de $\frac{\cos \theta'}{\rho'}$ relatif à un déplacement égal effectué sur la courbe d'égale courbure correspondante de l'autre surface, les deux surfaces seront développables l'une sur l'autre. L'expression de l'accroissement de $\frac{\cos \theta}{\rho}$, de même que celle de l'accroissement de $\frac{\cos \theta'}{\rho'}$, s'obtiennent d'ailleurs facilement comme il suit : du et dv étant les accroissements que reçoivent les coordonnées u et v , on a d'abord

$$d \frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{d \frac{\cos \theta}{\rho}}{du} du + \frac{d \frac{\cos \theta}{\rho}}{dv} dv.$$

Mais

$$\frac{dM}{du} du + \frac{dM}{dv} dv = 0$$

et

$$A^2 du^2 + 2 B^2 dudv + C^2 dv^2 = ds^2,$$

en appelant ds la valeur du déplacement effectué sur la courbe d'égale courbure : de là nous tirons

$$du = \pm \frac{\frac{dM}{dv} ds}{\sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2}},$$

$$dv = \pm \frac{-\frac{dM}{du} ds}{\sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2}};$$

donc

$$d \frac{\cos \theta}{\rho} = \left(\frac{d \frac{\cos \theta}{\rho}}{du} \frac{dM}{dv} - \frac{d \frac{\cos \theta}{\rho}}{dv} \frac{dM}{du} \right) \frac{\pm ds}{\sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2 B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2}}.$$

On aurait de même

$$d \frac{\cos \theta'}{\rho'} = \left(\frac{d \frac{\cos \theta'}{\rho'}}{du'} \frac{dM'}{dv'} - \frac{d \frac{\cos \theta'}{\rho'}}{dv'} \frac{dM'}{du'} \right) \frac{\pm ds}{\sqrt{A'^2 \left(\frac{dM'}{dv'} \right)^2 - 2B'^2 \frac{dM'}{du'} \frac{dM'}{dv'} + C'^2 \left(\frac{dM'}{du'} \right)^2}};$$

l'égalité que nous exigerons, indépendamment des équations (1), est donc

$$\frac{\frac{d \frac{\cos \theta}{\rho}}{du} \frac{dM}{dv} - \frac{d \frac{\cos \theta}{\rho}}{dv} \frac{dM}{du}}{\sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv} \right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du} \right)^2}} = \pm \frac{\frac{d \frac{\cos \theta'}{\rho'}}{du'} \frac{dM'}{dv'} - \frac{d \frac{\cos \theta'}{\rho'}}{dv'} \frac{dM'}{du'}}{\sqrt{A'^2 \left(\frac{dM'}{dv'} \right)^2 - 2B'^2 \frac{dM'}{du'} \frac{dM'}{dv'} + C'^2 \left(\frac{dM'}{du'} \right)^2}}.$$

que l'on peut encore mettre sous la forme plus simple

$$(2) \quad \frac{\frac{d \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right)}{du} \frac{dM}{dv} - \frac{d \frac{\cos \theta}{\rho}}{dv} \frac{dM}{du}}{\sqrt{A^2 C^2 - B^4}} = \pm \frac{\frac{d \frac{\cos \theta'}{\rho'}}{du'} \frac{dM'}{dv'} - \frac{d \frac{\cos \theta'}{\rho'}}{dv'} \frac{dM'}{du'}}{\sqrt{A'^2 C'^2 - B'^4}},$$

en vertu de l'égalité

$$\frac{\partial M}{\partial s} = \frac{\partial M'}{\partial s'},$$

et où le signe devra être convenablement fixé dans chaque cas.

79. Pour démontrer que lorsque les conditions (1) et (2) sont satisfaites, les surfaces sont développables l'une sur l'autre : observons que si, après avoir pris le point quelconque A sur la première surface, nous choisissons pour le point correspondant A', sur la seconde, le point qui a pour coordonnées les valeurs de u' et v' déduites des équations (1), dans lesquelles on a mis en place de u et de v les coordonnées du point A, le rapport $\frac{\cos \theta}{\rho}$ pour le point a (*fig.* 25) sera égal au rapport $\frac{\cos \theta'}{\rho'}$ pour le point a' d'après la relation (2); et comme la valeur de M pour le premier point est égale à celle de M' pour le second, les coordonnées de ces deux points vérifieront deux des équations (1), et, par suite, toutes les trois: alors on pourra conclure aussi que b et b' sont deux points dont les coordonnées vérifient

les trois équations (1); qu'il en est de même des points c et c' , etc.; enfin des points M et M' . En second lieu, il résultera de la formule (7) du n° 29, que les longueurs $A_1 a_1$, $a_1 b_1$, etc., sont respectivement égales à $A'_1 a'_1$, $a'_1 b'_1$, etc.; et aussi de la formule (12) du n° 38, que le rapport $\frac{\cos \theta}{\rho}$ pour les points A_1 , a_1 , b_1 , etc., est respectivement égal au rapport $\frac{\cos \theta'}{\rho'}$ pour les points A'_1 , a'_1 , b'_1 , etc.; d'où l'on conclura, deux de ces équations l'étant, que les trois équations (1) sont satisfaites pour les points A_1 et A'_1 , a_1 et a'_1 , b_1 et b'_1 , etc. On verrait de même que les mêmes équations sont satisfaites pour les points A_2 et A'_2 , a_2 et a'_2 , b_2 et b'_2 , etc., et ainsi de suite. La condition que nous avons exigée ci-dessus (n° 70) pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre est donc satisfaite.

On remarquera aisément que la démonstration précédente ne suppose pas la relation (2) satisfaite pour tous les points conjugués des deux surfaces, mais seulement pour tous ceux de ces points qui sont situés sur deux lignes d'égale courbure correspondantes; d'où résulte que, dans bien des cas, elle sera inutile. En effet, il arrivera souvent que l'une des lignes d'égale courbure sur la première surface se réduira à un point; or, si alors la ligne d'égale courbure correspondante sur l'autre surface se réduit aussi à un point, la condition (2) sera satisfaite d'elle-même pour ces deux lignes d'égale courbure.

Enfin il est évident que l'égalité (2) peut être remplacée par plusieurs autres: ainsi, par exemple, on peut lui substituer celle qui exprime que l'accroissement de $\frac{\partial s}{\partial M}$, pour un déplacement infiniment petit effectué sur une courbe d'égale courbure de la première surface, dans le sens positif de cette courbe, est égal à l'accroissement de $\frac{\partial s'}{\partial M'}$ relatif à un déplacement égal effectué sur la courbe d'égale courbure correspondante de l'autre surface. De même on peut remplacer l'égalité (2) par celle qui exprime que les éléments de deux lignes d'égale courbure correspondantes et appartenant aux deux surfaces, terminés à des points dont les coordonnées représentent deux systèmes de valeurs de u , v , u' , v' vérifiant les trois équations (1), sont égaux entre eux; cette dernière égalité est d'ailleurs, comme on le voit

aisément,

$$(2) \quad \frac{\sqrt{A'^2 C'^2 - B'^2}}{\sqrt{A^2 C^2 - B^2}} = \pm \frac{\frac{d\chi}{du} \frac{dM}{dv} - \frac{d\chi}{dv} \frac{dM}{du}}{\frac{dM'}{dv'}}, \quad \text{ou} \quad = \pm \frac{\frac{d\theta}{du} \frac{dM}{dv} - \frac{d\theta}{dv} \frac{dM}{du}}{\frac{dM'}{du'}},$$

en appelant $\chi(u, v)$ et $\theta(u, v)$ les valeurs de u' et de v' en fonction de u et de v que l'on déduit des équations (1).

80. Il peut se faire que le système des équations (1) se réduise à la première, en d'autres termes, que la seconde et la troisième de ces équations rentrent dans la première: dans ce cas, on aura évidemment

$$\frac{\partial s}{\partial M} = \varphi(M), \quad \frac{\partial s'}{\partial M'} = \varphi(M'),$$

$$\frac{\cos \theta}{\rho} = \varphi_1(M), \quad \frac{\cos \theta'}{\rho'} = \varphi_1(M);$$

et pour tous les points de AM (*fig.* 25), δs et $\frac{\cos \theta}{\rho}$ seront constants, ces quantités étant d'ailleurs toujours égales à $\delta s'$ et $\frac{\cos \theta'}{\rho'}$. D'après cela, on voit que les surfaces seront alors développables l'une sur l'autre d'une infinité de manières: en effet, après avoir choisi le point A sur AM, on pourra prendre pour son conjugué A' tel point qu'on voudra de A'M'. Dans ce cas, si l'on veut obtenir un système de points conjugués, il faudra chercher les trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure des deux surfaces, trajectoires qui sont ici évidemment des lignes géodésiques; on assujettira ensuite A et A', et, par suite, A₁ et A'₁, A₂ et A'₂, etc., à se trouver sur deux trajectoires orthogonales tout à fait quelconques d'ailleurs des lignes d'égale courbure de l'une et de l'autre surface; et puis a et a' , a_1 et a'_1 , a_2 et a'_2 , etc., b et b' , b_1 et b'_1 , b_2 et b'_2 , etc., à se trouver sur des trajectoires respectivement équidistantes des premières aux points situés sur les lignes AM et A'M'.

81. L'équation en u et v des trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure est pour la première surface, comme on l'a vu plus haut,

$$\left(C^2 \frac{dM}{du} - B^2 \frac{dM}{dv}\right) - \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du}\right) \frac{du}{dv} = 0;$$

comme aussi celle des trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure

de la seconde surface est

$$\left(C'^2 \frac{dM'}{du'} - B'^2 \frac{dM'}{dv'} \right) - \left(A'^2 \frac{dM'}{dv'} - B'^2 \frac{dM'}{du'} \right) \frac{du'}{dv'} = 0.$$

On intégrera donc ces deux équations, ce qui donnera

$$F(u, v) = c, \quad F'(u', v') = c;$$

puis on substituera aux constantes c et c' des fonctions $\psi(c)$ et $\psi'(c')$ de ces constantes, que l'on déterminera par la condition, que la série des courbes renfermées dans les équations précédentes et obtenues en faisant varier c et c' par degrés égaux, aient entre elles la même distance pour tous les points appartenant à une même ligne d'égale courbure quelconque; condition qu'il est évidemment possible de remplir d'après les hypothèses. Ainsi posant, par exemple,

$$F(u, v) = \psi(c),$$

on en déduira

$$\frac{dF}{du} \delta u + \frac{dF}{dv} \delta v = \frac{d\psi}{dc} \delta c,$$

δu et δv se rapportant à un déplacement normal à la trajectoire et étant, par conséquent, tels, que l'on ait

$$\frac{dM}{du} \delta u + \frac{dM}{dv} \delta v = 0.$$

De là on tire

$$\frac{\delta u}{\frac{dM}{dv}} = - \frac{\delta v}{\frac{dM}{du}} = \frac{\frac{d\psi}{dc} \delta c}{\frac{dF}{du} \frac{dM}{dv} - \frac{dF}{dv} \frac{dM}{du}},$$

d'où

$$\delta u = \frac{\frac{dM}{dv} \frac{d\psi}{dc} \delta c}{\frac{dF}{du} \frac{dM}{dv} - \frac{dF}{dv} \frac{dM}{du}},$$

$$\delta v = \frac{- \frac{dM}{du} \frac{d\psi}{dc} \delta c}{\frac{dF}{du} \frac{dM}{dv} - \frac{dF}{dv} \frac{dM}{du}},$$

et, par conséquent, pour la distance des deux trajectoires orthogonales

correspondantes aux valeurs c et $c + \delta c$ de la constante,

$$\delta s = \pm \frac{\sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{dv} \frac{dM}{du} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2}}{\frac{dF}{du} \frac{dM}{dv} - \frac{dF}{dv} \frac{dM}{du}} \frac{d\psi}{dc} \delta c.$$

Cette expression peut être mise sous une autre forme. En appelant K le facteur qui a rendu intégrable le premier membre de l'équation des trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure, on a

$$\begin{aligned} \frac{dF}{du} &= K \left(A^2 \frac{dM}{dv} - B^2 \frac{dM}{du} \right), \\ \frac{dF}{dv} &= K \left(B^2 \frac{dM}{dv} - C^2 \frac{dM}{du} \right), \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\frac{dF}{du} \frac{dM}{dv} - \frac{dF}{dv} \frac{dM}{du} = K \left[A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2 \right];$$

donc

$$\frac{\partial s}{\partial c} = \pm \frac{\frac{d\psi}{dc}}{K \sqrt{A^2 \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2}}.$$

Si l'on veut maintenant que $\frac{\partial s}{\partial c}$ soit constant pour tous les points d'une même ligne d'égale courbure, comme pour tous ces points le radical

$$\sqrt{\frac{A^2 C^2 - B^4}{A \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 - 2B^2 \frac{dM}{du} \frac{dM}{dv} + C^2 \left(\frac{dM}{du}\right)^2}}$$

a déjà la même valeur, il faudra qu'il en soit de même de $\frac{d\psi}{dc}$; or

$K \sqrt{A^2 C^2 - B^4}$ contenant u et v peut être exprimé en fonction de M et de $\psi(c)$ au moyen des deux équations

$$M = M, \quad F(u, v) = \psi(c).$$

On voit même que le résultat devra être simplement fonction de ψ , et alors,

posant l'équation

$$\frac{\frac{d\psi}{dc}}{K\sqrt{A^2C^2 - B^4}} = \text{const.},$$

on en déduira par une quadrature la valeur de $\psi(c)$.

On procédera de même pour avoir $\psi'(c')$, en ayant soin, bien entendu,

de prendre $\frac{\frac{d\psi'}{dc'}}{K'\sqrt{A'^2C'^2 - B'^4}}$ égal à la même constante que $\frac{\frac{d\psi}{dc}}{K\sqrt{A^2C^2 - B^4}}$.

82. Une fois $\psi(c)$ et $\psi'(c')$ déterminés par les conditions précédentes, on obtiendra les points conjugués des deux surfaces, en tirant des deux équations

$$M = M',$$

$$F(u, v) = \psi(c), \quad F'(u', v') = \psi'(a + c),$$

les valeurs de u' , v' et c en fonction de u et de v . Dans ces équations, a représente une constante quelconque.

83. Faisons une application des formules précédentes.

Considérons l'hélicoïde gauche dont les équations sont, comme l'on sait,

$$x = v \cos u, \quad y = v \sin u, \quad z = mu,$$

m étant une constante, et la surface de révolution engendrée par une chaînette tournant autour de sa directrice, et dont les équations peuvent être considérées comme étant

$$x = v' \cos u', \quad y = v' \sin u', \quad z = n\sqrt{-1} \arccos\left(\cos = \frac{v'}{n}\right),$$

n étant une seconde constante. Nous aurons d'abord

$$A^2 = m^2 + v^2, \quad B^2 = 0, \quad C^2 = 1,$$

$$A'^2 = v'^2, \quad B'^2 = 0, \quad C'^2 = \frac{v'^2}{v'^2 - n^2}.$$

Calculons maintenant les carrés des courbures de ces deux surfaces; nous trouvons aisément, au moyen de la formule du n° 74, pour la première surface,

$$-\frac{m^2}{(m^2 + v^2)^2},$$

et pour la seconde,

$$-\frac{n^2}{\nu'^2}.$$

Nous poserons donc

$$\frac{m}{m^2 + \nu^2} = \frac{n}{\nu'^2},$$

ou bien

$$m + \frac{\nu^2}{m} = \frac{\nu'^2}{n},$$

et en même temps nous voyons que

$$\frac{dM}{du} = 0, \quad \frac{dM}{d\nu} = \frac{4m^2\nu}{(m^2 + \nu^2)^2},$$

$$\frac{dM'}{du'} = 0, \quad \frac{dM'}{d\nu'} = \frac{4n^2}{\nu'^2};$$

d'où nous tirons

$$\frac{\partial s}{\partial M} = \frac{(m^2 + \nu^2)^2}{4m^2\nu}, \quad \frac{\partial s'}{\partial M'} = \frac{\nu'^6}{4n^2\sqrt{\nu'^2 - n^2}},$$

ce qui donne pour seconde équation,

$$\frac{(m^2 + \nu^2)^2}{m^2\nu} = \frac{\nu'^6}{n^2\sqrt{\nu'^2 - n^2}}.$$

Enfin la troisième se calcule aussi sans difficulté, et donne

$$\frac{\nu}{m^2 + \nu^2} = \frac{\sqrt{\nu'^2 - n^2}}{\nu'^2};$$

u et u' manquant dans nos trois équations, il faut que nous puissions en tirer ν' en fonction de ν . Or la première et la dernière donnent les deux valeurs de ν' suivantes :

$$\nu'^2 = \frac{n\nu^2}{m} + mn,$$

$$\nu'^2 = \frac{n^2\nu^2}{m^2} + n^2,$$

qui ne peuvent être compatibles entre elles qu'autant que $m = n$; alors on a

$$\nu'^2 = \nu^2 + m^2,$$

et il est facile de voir que cette valeur vérifie aussi la seconde équation.

Quant à la quatrième équation, qui exprime que la variation du rapport $\frac{\cos \theta}{\rho}$ relatif à une ligne d'égale courbure, pour un déplacement constant effectué sur cette ligne, a la même valeur quelle que soit la surface considérée, elle se réduit à une identité $0 = 0$. Les deux surfaces proposées sont donc développables l'une sur l'autre quand $m = n$. De plus, comme les trois équations qui, en général, servent à déterminer u' et v' en fonction de u et de v , se réduisent, dans le cas actuel, à une seule

$$v'^2 = v^2 + m^2,$$

nous voyons que cette superposition peut se faire d'une infinité de manières.

Si l'on veut connaître les coordonnées u' et v' du point conjugué de u, v , on y parviendra bien simplement dans le cas actuel. En effet, on voit facilement qu'ici les trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure sont précisément les lignes coordonnées $u = \text{const.}$ pour la première surface et $u' = \text{const.}$ pour la seconde, et que, de plus, pour des accroissements égaux de u ou de u' , on a des courbes sur la première surface ou sur la seconde, qui ont la même distance, aux points conjugués. D'après cela, les équations qui détermineront u' et v' en fonction de u et de v sont

$$u' = u + a, \quad v'^2 = v^2 + m^2,$$

a étant une constante tout à fait quelconque.

84. Il pourrait se faire que, pour tous les points de chacune des surfaces considérées, la courbure fût la même; alors il n'existerait plus de lignes d'égale courbure, et les considérations précédentes se trouveraient en défaut. Mais il est évident que si l'on a deux surfaces d'égale courbure et que la courbure pour les différents points de la première soit égale à la courbure pour les différents points de la seconde, ces deux surfaces seront toujours développables l'une sur l'autre, et même de façon qu'après avoir pris un point quelconque A sur la première surface, il sera possible de lui donner pour conjugué un point quelconque A' de la seconde. Si, dans ce cas, on veut trouver un système de points conjugués, on cherchera pour la première surface les lignes minima issues du point A , et pour la seconde les lignes minima issues du point A' , et les points conjugués, en conservant les notations du

n° 67, seront ceux pour lesquels on aura

$$r = r', \quad \omega = \omega'.$$

Il va sans dire que les lignes minima fixes, à partir desquelles on compte les angles ω et ω' , sont supposées tout à fait quelconques l'une par rapport à l'autre.

85. La considération des surfaces d'égale courbure, qui jouissent, comme on le voit aisément, de la propriété de se développer sur des sphères, peut être utilement employée dans différentes circonstances. Ainsi, par exemple, étant donnée une surface quelconque, il est toujours possible de trouver une surface d'égale courbure, qui lui soit osculatrice en un point donné; par conséquent, on peut aussi faire jouer à ces surfaces d'égale courbure le même rôle qu'au cercle osculateur quand il s'agit des lignes: il est même facile de prévoir qu'à cause de la propriété qui lie les surfaces de courbure constante à la sphère, il sera permis, sous quelques rapports, d'en retirer les mêmes avantages que des cercles osculateurs. Pour le montrer par un exemple, je prendrai le beau théorème de Legendre sur les petits triangles sphériques, et d'après lequel ces triangles sont résolubles comme des triangles plans, pourvu qu'on diminue chaque angle du tiers de l'excès sphérique. Il est évident que ce théorème est vrai pour les surfaces à courbure constante, d'après la propriété fondamentale de ces surfaces; par suite, il est vrai pour une surface quelconque: on arrive ainsi très-simplement à un beau résultat que M. Gauss a déduit de calculs fort compliqués. A la vérité on ne voit pas encore avec quel degré d'approximation le théorème s'applique, mais cette seconde partie s'établit aisément, comme il suit: Considérons deux surfaces infiniment voisines S et S' ; traçons sur la première un triangle ABC ou T dont les côtés soient des lignes géodésiques, et par les différents points des côtés de ce triangle menons des normales à la surface S que nous prolongerons jusqu'à leur rencontre avec la surface S' : nous formerons ainsi sur la surface S' un second triangle que nous appellerons $A'B'C'$ ou T' . Or il est évident d'abord que les côtés du triangle T' auront en tous leurs points leur courbure géodésique infiniment petite du même ordre que la distance des deux surfaces S et S' , et que la différence des côtés du triangle T' et des côtés correspondants du triangle T , de même

que la différence des angles correspondants et des surfaces de ces deux triangles seront infiniment petites d'un ordre double de celui qui représente la distance des deux surfaces S et S' . En second lieu, si l'on compare la ligne géodésique tracée sur la surface S' et joignant les deux points A' et B' par exemple, au côté $A'B'$ du triangle T' , on verra aisément que la distance de ces courbes en leurs différents points, les angles qu'elles forment aux points A' et B' et la portion de la surface qu'elles comprennent, sont du même degré de grandeur que la courbure géodésique du côté $A'B'$ du triangle T' , et que la différence de leurs longueurs est du même degré de grandeur que le carré de cette courbure : il suffit de se rappeler la formule (12) établie au n° 38, et la forme de la valeur qu'on en déduit pour $\delta\sigma$ par l'intégration. Tout ceci admis, il est facile de conclure que si le théorème de Legendre est vrai pour le triangle ABC , en négligeant les infiniment petits d'un ordre égal ou supérieur à celui de la distance des deux surfaces S et S' , ce théorème sera aussi vrai pour le triangle T'' tracé sur la surface S' et formé en joignant deux à deux les points A' , B' , C' par des lignes géodésiques, en négligeant les infiniment petits de l'ordre de la distance des deux surfaces S et S' . Supposons maintenant que les deux surfaces S et S' soient osculatrices l'une de l'autre en un point O du triangle ABC et que l'une de ces surfaces, la surface S par exemple, soit une surface à courbure constante. Si nous supposons que les côtés du triangle T soient des infiniment petits que l'on considérera comme du premier ordre, le théorème de Legendre sera vrai pour le triangle T , en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre; en même temps les normales à la surface S qui servent à déterminer le triangle T' seront infiniment petites du troisième ordre : donc le théorème de Legendre sera vrai pour le triangle T'' , en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, ce qui est bien le degré d'approximation obtenu par M. Gauss. Le même raisonnement prouve que le théorème sera vrai aux infiniment petits près du quatrième ordre, quand on pourra trouver une surface à courbure constante ayant avec la surface proposée un contact du troisième ordre. Or c'est ce qui arrive dans certains cas ; car si l'on cherche, sous forme de série, la valeur de z qui vérifie l'équation des surfaces à courbure constante,

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \pm \frac{1}{a^2},$$

dans laquelle la constante a est tout à fait quelconque, on voit que l'on peut prendre arbitrairement pour un point de la surface, non-seulement p, q, r, s, t , mais encore deux des quatre dérivées du troisième ordre; de telle sorte que si, après les avoir prises égales à celles que l'on déduit de l'équation de la surface proposée, les deux autres dérivées du troisième ordre se trouvent aussi égales pour les deux surfaces, ces surfaces auront un contact du troisième ordre. Tout cela avait été remarqué par M. Gauss.

86. Je terminerai par quelques remarques relatives à ces surfaces d'égale courbure. Reprenons leur équation aux dérivées partielles, qui est

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \pm \frac{1}{a^2},$$

p, q, r, s, t conservant leur désignation habituelle.

L'intégration générale de cette équation paraît offrir de grandes difficultés. Mais si on se donne comme nouvelle condition que la surface soit de révolution, on l'effectue très-simplement; en effet, dans ce cas, on voit directement que l'équation se réduit à

$$\frac{(1 + p^2)^2 y}{q} = \pm a^2,$$

p, q et y se rapportant au méridien de la surface.

De là on tire

$$\frac{q}{(1 + p^2)^2} = \pm \frac{y}{a^2};$$

multipliant par $2dy$ et intégrant, il vient

$$\frac{1}{1 + p^2} = c \mp \frac{y^2}{a^2}.$$

Dans le cas où la surface ne doit présenter aucun point singulier, il faut que pour $y = 0$ on ait $p = \infty$; donc $c = 0$, et alors

$$\frac{1}{1 + p^2} = \mp \frac{y^2}{a^2},$$

ou simplement ici

$$\frac{1}{1 + p^2} = \frac{y^2}{a^2};$$

d'où l'on tire

$$y^2 + (x - b)^2 = a^2.$$

Ainsi la surface, dans ce cas, est nécessairement une sphère. Mais admettons que la méridienne fasse un angle quelconque α , avec l'axe de révolution : pour $y = 0$ on aura $p = \tan \alpha$; donc

$$c = \cos^2 \alpha,$$

et l'équation deviendra

$$1 + p^2 = \frac{a^2}{a^2 \cos^2 \alpha \mp y^2};$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{(a^2 \sin^2 \alpha \pm y^2)}{a^2 \cos^2 \alpha \mp y^2}},$$

d'où enfin

$$dx = \frac{dy \sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha \mp y^2) (a^2 \sin^2 \alpha \pm y^2)}}{a^2 \sin^2 \alpha \pm y^2}.$$

L'intégration du second membre dépend des fonctions elliptiques, et, par conséquent, ne peut être faite sous forme finie; mais on obtient simplement, comme l'ont montré MM. Delaunay et Sturm pour quelques questions dépendant du calcul des variations (*voir* le Journal de M. Liouville, t. VI), l'équation de la courbe, qu'il faut faire rouler sur une ligne droite pour qu'un certain point appartenant à cette courbe décrive la méridienne cherchée. En effet, d'après les relations indiquées par M. Sturm, et que l'on retrouvera facilement, on doit avoir, entre les coordonnées polaires de la courbe cherchée et les coordonnées rectangles de la méridienne,

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \pm \frac{1}{r \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2}},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2}},$$

et, par conséquent, dans le cas actuel où $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \frac{a^2 \cos^2 \alpha \mp y^2}{a^2}$,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{a^2 \cos^2 \alpha \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 \right] \mp 1}{a^2},$$

ou

$$\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{r^2} \pm 1 = a^2 \cos^2 \alpha \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2,$$

d'où

$$\frac{d \frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{r^2} \pm 1}} = \pm \frac{d\theta}{a \cos \alpha};$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{a \sin \alpha}{r} = \frac{1}{2} \left(A e^{\pm \tan \alpha \cdot \theta} \mp \frac{1}{A} e^{\mp \tan \alpha \cdot \theta} \right).$$

Dans cette équation, le signe qui précède θ est indéterminé, mais celui qui est placé devant $\frac{1}{A}$ dépend de celui de la courbure $\pm \frac{1}{a^2}$ de la surface.

§ VII. — *Recherche de toutes les surfaces gauches qui peuvent s'appliquer sur une surface gauche donnée.*

87. Dans ce qui précède, nous nous sommes bornés à indiquer le moyen de reconnaître si deux surfaces données par leurs équations étaient ou non développables l'une sur l'autre. On pourrait attaquer la question sous un autre point de vue, et se proposer de chercher toutes les surfaces qui sont développables sur une surface donnée; la question ainsi posée offre des difficultés plus sérieuses. Nous allons la traiter pour le cas des surfaces gauches, en nous aidant d'un travail qui a été publié sur ce sujet par M. Minding, dans le tome XVIII du Journal de M. Crelle, et en supposant, comme cet habile géomètre, que les génératrices rectilignes des deux surfaces soient des lignes conjuguées.

Supposons les surfaces déterminées de la même manière que dans le § IV. Ainsi, pour définir la première surface, donnons-nous une courbe directrice AmB , par trois équations de la forme

$$x = f(u), \quad y = \phi(u), \quad z = \psi(u),$$

et les angles α, β, γ , en général fonction de u que les génératrices recti-

lignes forment avec les axes des coordonnées, de manière que les coordonnées d'un point quelconque de cette surface soient

$$X = x + n \cos \alpha,$$

$$Y = y + n \cos \beta,$$

$$Z = z + n \cos \gamma,$$

n étant la distance comptée sur la génératrice rectiligne de ce point à la directrice.

Soient ensuite, pour une seconde surface que nous voulons déterminer par la condition qu'elle puisse se développer sur la première,

$$x' = f'(u), \quad y' = \phi'(u), \quad z' = \psi'(u)$$

les équations de la transformée de la directrice de la première surface, et α' , β' , γ' les angles que les génératrices rectilignes font avec les axes des coordonnées, de telle sorte que les coordonnées d'un point quelconque de cette seconde surface soient

$$X' = x' + n' \cos \alpha',$$

$$Y' = y' + n' \cos \beta',$$

$$Z' = z' + n' \cos \gamma'.$$

Commençons par calculer, pour chacune des deux surfaces, les fonctions que nous avons appelées U , U_1 , U_2 , U_3 dans le § IV, c'est-à-dire posons, pour la première surface,

$$(1) \quad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = U,$$

$$(2) \quad \cos \alpha \frac{dx}{du} + \cos \beta \frac{dy}{du} + \cos \gamma \left(\frac{dz}{du}\right) = U_1,$$

$$(3) \quad \frac{dx}{du} \frac{d \cos \alpha}{du} + \frac{dy}{du} \frac{d \cos \beta}{du} + \frac{dz}{du} \frac{d \cos \gamma}{du} = U_2,$$

$$(4) \quad \left(\frac{d \cos \alpha}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \beta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \gamma}{du}\right)^2 = U_3,$$

et pour la seconde,

$$(1') \quad \left(\frac{dx'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{du}\right)^2 = U',$$

$$(2') \quad \cos \alpha' \frac{dx'}{du} + \cos \beta' \frac{dy'}{du} + \cos \gamma' \frac{dz'}{du} = U'_1,$$

$$(3') \quad \frac{dx'}{du} \frac{d \cos \alpha'}{du} + \frac{dy'}{du} \frac{d \cos \beta'}{du} + \frac{dz'}{du} \frac{d \cos \gamma'}{du} = U'_2,$$

$$(4') \quad \left(\frac{d \cos \alpha'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \beta'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \gamma'}{du}\right)^2 = U'_3.$$

Il est clair que si l'on détermine $x', y', z', \alpha', \beta', \gamma'$ par la condition que

$$(a) \quad \begin{cases} U = U', & U_1 = U'_1, \\ U_2 = U'_2, & U_3 = U'_3, \end{cases}$$

les deux surfaces pourront se développer l'une sur l'autre, et, réciproquement, lorsque du moins on s'impose la condition que les génératrices rectilignes des deux surfaces soient des lignes conjuguées : il suffit, en effet, de se rappeler les formules du n° 54. Joignant donc à ces quatre équations la suivante :

$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1,$$

qui doit évidemment être satisfaite, on aura un système de cinq équations au moyen desquelles on pourra déterminer cinq des six inconnues $x', y', z', \cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma'$ en fonction de la sixième, qui devra être considérée comme fonction complètement arbitraire de u .

88. Pour faire le calcul, remarquons d'abord, avec M. Minding, qu'on peut laisser de côté la dernière équation, en posant

$$\cos \alpha' = \cos \theta \cos \omega, \quad \cos \beta' = \cos \theta \sin \omega, \quad \cos \gamma' = \sin \theta,$$

et qu'alors l'équation

$$U'_3 = \left(\frac{d \cos \alpha'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \beta'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \gamma'}{du}\right)^2 = U,$$

devient

$$(5) \quad d\theta^2 + \cos^2 \theta d\omega^2 = U_3 du^2;$$

d'où l'on peut déduire, par une simple quadrature (θ étant l'inconnue que

l'on considère comme fonction arbitraire de u), la valeur de l'inconnue auxiliaire ω . θ et ω étant ainsi connus, en fonction de u , on aura, par cela même, les valeurs des trois premières inconnues de la question $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$, aussi en fonction de u .

89. Posons maintenant

$$\cos \beta' d \cos \gamma' - \cos \gamma' d \cos \beta' = A du,$$

$$\cos \gamma' d \cos \alpha' - \cos \alpha' d \cos \gamma' = B du,$$

$$\cos \alpha' d \cos \beta' - \cos \beta' d \cos \alpha' = C du,$$

ce qui donne, en vertu des valeurs de $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$,

$$A = \sin \omega \frac{d\theta}{du} - \sin \theta \cos \theta \cos \omega \frac{d\omega}{du},$$

$$B = -\cos \omega \frac{d\theta}{du} - \sin \theta \cos \theta \sin \omega \frac{d\omega}{du},$$

$$C = \cos^2 \theta \frac{d\omega}{du};$$

il viendra, en éliminant successivement $\frac{dx'}{du}$, $\frac{dy'}{du}$, $\frac{dz'}{du}$ des équations (2') et (3'), dans lesquelles on aura remplacé préalablement U_1 et U_2 par leurs valeurs U , et U , déduites des équations (a),

$$(6) \quad B \frac{dz'}{du} - C \frac{dy'}{du} = U, \frac{d \cos \alpha'}{du} - U, \cos \alpha',$$

$$(7) \quad C \frac{dx'}{du} - A \frac{dz'}{du} = U, \frac{d \cos \beta'}{du} - U, \cos \beta',$$

$$(8) \quad A \frac{dy'}{du} - B \frac{dx'}{du} = U, \frac{d \cos \gamma'}{du} - U, \cos \gamma',$$

équations qui ne sont pas distinctes, et qui se réduisent seulement à deux, comme on le voit aisément en multipliant la première par A , la seconde par B , la troisième par C , et ajoutant. Faisant la somme membre à membre des carrés de ces équations, et remarquant que, d'après les équations (a),

$$A^2 + B^2 + C^2 = U,$$

$$\left(\frac{dx'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{du}\right)^2 = U,$$

$$\left(\frac{d \cos \alpha'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \beta'}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \gamma'}{du}\right)^2 = U,$$

il vient aisément

$$UU_1 - \left(A \frac{dx'}{du} + B \frac{dy'}{du} + C \frac{dz'}{du} \right)^2 = U_1^2 U_2 + U_2^2,$$

d'où

$$(9) \quad A \frac{dx'}{du} + B \frac{dy'}{du} + C \frac{dz'}{du} = \pm K,$$

en posant

$$U_1 (U - U_1^2) - U_2^2 = K^2.$$

Des équations (6), (7), (8), (9), on tire maintenant

$$\frac{dx'}{du} = \frac{1}{U_1} \left(\pm AK + U_2 \frac{d \cos \alpha'}{du} + U_1 U_2 \cos \alpha' \right),$$

$$\frac{dy'}{du} = \frac{1}{U_2} \left(\pm BK + U_1 \frac{d \cos \beta'}{du} + U_1 U_2 \cos \beta' \right),$$

$$\frac{dz'}{du} = \frac{1}{U_3} \left(\pm CK + U_1 \frac{d \cos \gamma'}{du} + U_1 U_2 \cos \gamma' \right);$$

d'où enfin

$$x' = \int \frac{du}{U_1} \left(\pm AK + U_2 \frac{d \cos \alpha'}{du} + U_1 U_2 \cos \alpha' \right),$$

$$y' = \int \frac{du}{U_2} \left(\pm BK + U_1 \frac{d \cos \beta'}{du} + U_1 U_2 \cos \beta' \right),$$

$$z' = \int \frac{du}{U_3} \left(\pm CK + U_1 \frac{d \cos \gamma'}{du} + U_1 U_2 \cos \gamma' \right),$$

ce qui fait connaître les trois dernières inconnues x' , y' , z' en fonction de u . On connaît ainsi les six inconnues α' , β' , γ' , x' , y' , z' en fonction de u , et la question est résolue.

90. On aurait pu arriver directement aux équations (6), (7), (8), (9) au moyen desquelles on détermine $\frac{dx'}{du}$, $\frac{dy'}{du}$, $\frac{dz'}{du}$, par une méthode géométrique qui a l'avantage de donner l'interprétation de ces équations.

Appelons λ , μ , ν les angles que forme avec les parties positives des axes des coordonnées la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines de la seconde surface gauche, prolongée de celle qui fait les angles α' , β' , γ' avec les axes, et que nous supposons se rapporter au point m de la directrice (*fig. 27*), à celle qui fait les angles $\alpha' + \frac{d\alpha'}{du} du$, $\beta' + \frac{d\beta'}{du} du$, $\gamma' + \frac{d\gamma'}{du} du$,

où du est positif, et qui se rapporte au point infiniment voisin m' ; nous aurons

$$\cos \alpha' \cos \lambda + \cos \beta' \cos \mu + \cos \gamma' \cos \nu = 0,$$

$$\frac{d \cos \alpha'}{du} \cos \lambda + \frac{d \cos \beta'}{du} \cos \mu + \frac{d \cos \gamma'}{du} \cos \nu = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\cos \lambda}{\cos \beta' \frac{d \cos \gamma'}{du} - \cos \gamma' \frac{d \cos \beta'}{du}} &= \frac{\cos \mu}{\cos \gamma' \frac{d \cos \alpha'}{du} - \cos \alpha' \frac{d \cos \gamma'}{du}} \\ &= \frac{\cos \nu}{\cos \alpha' \frac{d \cos \beta'}{du} - \cos \beta' \frac{d \cos \alpha'}{du}} = \frac{1}{\pm \sqrt{U}}, \end{aligned}$$

en se rappelant les formules du n° 87, et le radical étant pris positivement ou négativement, selon que la génératrice en m' est ou non du côté du plan de mm' et de la génératrice en m , où se trouve la normale extérieure à la surface (*); d'où l'on tire, en raison des mêmes formules,

$$A = \pm \sqrt{U} \cos \lambda, \quad B = \pm \sqrt{U} \cos \mu, \quad C = \pm \sqrt{U} \cos \nu.$$

Soient maintenant (*fig. 27*) mG et $m'G'$ les génératrices correspondantes aux deux points m et m' , mn une parallèle à la plus courte distance de ces deux génératrices, menée par le point m ; mp une perpendiculaire à mG , rencontrant $m'G'$ en p : le trièdre formé par mm' , mn et mp donnera

$$\cos m'mn = \cos nmp \cos m'mp.$$

Or on a

$$\cos m'mn = \frac{\cos \lambda}{\sqrt{U}} \frac{dx'}{du} + \frac{\cos \mu}{\sqrt{U}} \frac{dy'}{du} + \frac{\cos \nu}{\sqrt{U}} \frac{dz'}{du} = \pm \frac{A \frac{dx'}{du} + B \frac{dy'}{du} + C \frac{dz'}{du}}{\sqrt{U}},$$

puis

$$\cos m'mp = \sin \widehat{mm'}, mG = \sqrt{1 - \frac{U_1}{U}} = \frac{\sqrt{U - U_1}}{\sqrt{U}};$$

(*) Ceci n'est vrai que parce que nous supposons, pour simplifier, que la perpendiculaire commune aux deux génératrices rectilignes les rencontre sur leur partie positive, et que nous faisons les mêmes hypothèses sur le sens positif de la directrice, des génératrices rectilignes, des trajectoires orthogonales de ces génératrices, et de la normale extérieure à la surface, qu'au n° 84.

et enfin l'angle nmp , qui est égal à celui que fait le plan tangent de la surface gauche au point m avec le plan tangent au point où la ligne de striction rencontre mG , peut être facilement calculé. En effet, conservant les notations du § IV, on a, sans tenir compte des signes,

$$\text{tang } \varphi = \frac{n}{r'_0}, \quad \text{d'où} \quad \cos \varphi = \frac{r'_0}{\sqrt{n^2 + (r'_0)^2}};$$

puis

$$\frac{1}{r_1} = \frac{U_2}{U - U_1^2}, \quad n = \frac{U_2}{U_1}, \quad r_1 = \frac{n^2 + (r'_0)^2}{n}.$$

Or les trois dernières relations donnent aisément

$$n^2 + (r'_0)^2 = \frac{U - U_1^2}{U_1} \quad \text{et} \quad (r'_0)^2 = \frac{U_2(U - U_1^2) - U_2^2}{U_1^2};$$

donc

$$\cos \varphi = \cos nmp = \frac{\sqrt{U_2(U - U_1^2) - U_2^2}}{\sqrt{U - U_1^2}}.$$

Substituant maintenant à $\cos m'mn$, $\cos nmp$, $\cos m'mp$ leurs valeurs dans la relation

$$\cos m'mn = \cos nmp \cos m'mp,$$

il vient

$$A \frac{dx'}{du} + B \frac{dy'}{du} + C \frac{dz'}{du} = \pm \sqrt{U_2(U - U_1^2) - U_2^2};$$

ce qui est la relation (9).

91. Pour obtenir les formules (6), (7) et (8) par le point m , menons une parallèle mG'_1 à la génératrice rectiligne $m'G'$ (*fig. 27*), et soit mX l'intersection des deux plans GmG'_1 et pmm' qui sont évidemment perpendiculaires l'un à l'autre, menée du côté de mG où se trouve mG'_1 . Les trièdres formés, d'une part, par mm' , mX et mG , et, d'une autre, par mm' , mX et mG'_1 , donnent successivement

$$\cos m'mG = \cos m'mX \cos GmX,$$

$$\cos m'mG'_1 = \cos m'mX \cos G'_1mX,$$

d'où

$$\frac{\cos m'mG}{\cos m'mG'_1} = \frac{\cos GmX}{\cos G'_1mX};$$

de là on peut facilement conclure la valeur de $\cos GmX$ et celle de

$\cos G'_1 mX$: en effet, $\cos m'mG$ et $\cos m'mG'_1$ sont connus, et l'on a

$$\cos m'mG = \cos \alpha' \frac{dx'}{ds'} + \cos \beta' \frac{dy'}{ds'} + \cos \gamma' \frac{dz'}{ds'} = \frac{U_1}{\sqrt{U}},$$

$$\begin{aligned} \cos m'mG'_1 &= (\cos \alpha' + d \cos \alpha') \frac{dx'}{ds'} + (\cos \beta' + d \cos \beta') \frac{dy'}{ds'} \\ &+ (\cos \gamma' + d \cos \gamma') \frac{dz'}{ds'} = \frac{U_1 + U_2 du}{\sqrt{U}}, \end{aligned}$$

puis

$$G'_1 mX - GmX = -d\theta = -du \sqrt{U_2};$$

d'où, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\cos G'_1 mX = \cos GmX + \sin GmX \cdot \sqrt{U_2} du.$$

Substituant, on tire

$$\sqrt{U_2} \tan GmX = \frac{U_2}{U_1},$$

d'où

$$\sin GmX = \frac{U_2}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}},$$

$$\cos GmX = \frac{U_1 \sqrt{U_2}}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}},$$

et

$$\cos G'_1 mX = \frac{\sqrt{U_2} (U_1 + U_2 du)}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}}.$$

D'un autre côté, on voit que si on élève par le point m , dans le plan GmG'_1 , une perpendiculaire mY à mX du côté où se trouvent mG et mG'_1 , les angles YmG et YmG'_1 auront respectivement pour sinus, $\cos GmX$ et $\cos G'_1 mX$; ainsi

$$\sin YmG = \frac{U_1 \sqrt{U_2}}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}},$$

$$\sin YmG'_1 = \frac{\sqrt{U_2} (U_1 + U_2 du)}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2}}.$$

D'ailleurs il est facile de déterminer les angles que cette ligne mY , qui est évidemment perpendiculaire au plan $m'mn$, fait avec les axes; car, en les appelant ϖ , ρ , σ , on a

$$\cos \varpi \cdot \frac{dx'}{du} + \cos \rho \cdot \frac{dy'}{du} + \cos \sigma \cdot \frac{dz'}{du} = 0,$$

$$\cos \rho \cdot A + \cos \varpi \cdot B + \cos \sigma \cdot C = 0,$$

d'où

$$\frac{\cos \varpi}{C \frac{dy'}{du} - B \frac{dz'}{du}} = \frac{\cos \rho}{A \frac{dz'}{du} - C \frac{dx'}{du}} = \frac{\cos \sigma}{B \frac{dx'}{du} - A \frac{dy'}{du}} = \frac{1}{\sqrt{U_2 U - K^2}} = \frac{1}{\sqrt{U_1^2 U_2 + U_2^2}}.$$

Or on sait que lorsqu'on conduit dans un même plan trois droites issues d'un même point, om , om' , om'' , et un axe quelconque oX (*fig. 28*), l'on a

$$\sin mom'' \cos m'oX = \sin m'om'' \cos moX + \sin mom' \cos m''oX;$$

appliquant cette propriété aux systèmes des trois droites mG'_1 , mG , mY , en prenant successivement pour axe oX , les trois axes des coordonnées, il vient, en remarquant que $\sin GmG'_1 = d\theta = du \sqrt{U_2}$,

$$\begin{aligned} du \sqrt{U_2} \cos \varpi &= \frac{\sqrt{U_2} (U_1 + U_2 du) \cos \alpha' - \sqrt{U_2} U_1 (\cos \alpha' + d \cos \alpha')}{\sqrt{U_2^2 + U_1^2 U_2}} \\ &= \frac{\sqrt{U_2} (U_2 \cos \alpha' du - U_1 d \cos \alpha')}{\sqrt{U_2^2 + U_1^2 U_2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} du \sqrt{U_2} \cos \rho &= \frac{\sqrt{U_2} (U_1 + U_2 du) \cos \beta' - \sqrt{U_2} U_1 (\cos \beta' + d \cos \beta')}{\sqrt{U_2^2 + U_1^2 U_2}} \\ &= \frac{\sqrt{U_2} (U_2 \cos \beta' du - U_1 d \cos \beta')}{\sqrt{U_2^2 + U_1^2 U_2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} du \sqrt{U_2} \cos \sigma &= \frac{\sqrt{U_2} (U_1 + U_2 du) \cos \gamma' - \sqrt{U_2} U_1 (\cos \gamma' + d \cos \gamma')}{\sqrt{U_2^2 + U_1^2 U_2}} \\ &= \frac{\sqrt{U_2} (U_2 \cos \gamma' du - U_1 d \cos \gamma')}{\sqrt{U_2^2 + U_1^2 U_2}}; \end{aligned}$$

ou bien, en substituant à $\cos \varpi$, $\cos \rho$, $\cos \sigma$, leurs valeurs

$$C \frac{dy'}{du} - B \frac{dz'}{du} = U_2 \cos \alpha' - U_1 \frac{d \cos \alpha'}{du},$$

$$A \frac{dz'}{du} - C \frac{dx'}{du} = U_2 \cos \beta' - U_1 \frac{d \cos \beta'}{du},$$

$$B \frac{dx'}{du} - A \frac{dy'}{du} = U_2 \cos \gamma' - U_1 \frac{d \cos \gamma'}{du}.$$

Ce sont les formules (6), (7), (8).

92. Dans le cas où l'on connaîtra la ligne de striction de la surface gauche proposée, il conviendra de prendre cette ligne pour directrice de la surface ; car alors U_2 sera nul et les formules précédentes se simplifieront.

93. Si l'on veut assujettir la surface cherchée à avoir un plan directeur, il conviendra de prendre ce plan pour plan des xy , et l'on aura $\cos \gamma' = 0$, par conséquent $\theta = 0$; d'où

$$\cos \alpha' = \cos \omega, \quad \cos \beta' = \sin \omega,$$

et

$$d\omega = \sqrt{U_3} du;$$

d'où

$$\omega = \int \sqrt{U_3} du.$$

Puis

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \sqrt{U_3},$$

donc

$$dx' = \left(U_1 \cos \omega + \frac{U_2}{U_3} \frac{d \cos \omega}{du} \right) du = \left(U_1 \cos \omega - \frac{U_2}{\sqrt{U_3}} \sin \omega \right) du,$$

$$dy' = \left(U_1 \sin \omega + \frac{U_2}{U_3} \frac{d \sin \omega}{du} \right) du = \left(U_1 \sin \omega + \frac{U_2}{\sqrt{U_3}} \cos \omega \right) du,$$

$$dz' = \frac{K}{\sqrt{U_3}} du;$$

d'où enfin, pour les équations de la surface,

$$X' = n' \cos \omega + \int \left(U_1 \cos \omega - \frac{U_2}{\sqrt{U_3}} \sin \omega \right) du,$$

$$Y' = n' \sin \omega + \int \left(U_1 \sin \omega + \frac{U_2}{\sqrt{U_3}} \cos \omega \right) du,$$

$$Z' = \int \frac{K}{\sqrt{U_3}} du.$$

94. Faisons quelques applications des formules précédentes.

Cherchons en premier lieu la surface gauche à plan directeur qui peut être développée sur la surface gauche de révolution.

Les équations de l'hyperboloïde gauche de révolution, en prenant le

cercle de gorge pour directrice, sont

$$X = r \cos u + n \sin \alpha \sin u,$$

$$Y = r \sin u - n \sin \alpha \cos u,$$

$$Z = n \cos \alpha,$$

où r représente le rayon du cercle de gorge situé dans le plan des xy , et α l'angle constant que font avec l'axe de la surface pris pour axe des z , les génératrices rectilignes.

De ces équations nous tirerons, sans difficulté,

$$U = r^2, \quad U_1 = -r \sin \alpha,$$

$$U_2 = 0, \quad U_3 = \sin^2 \alpha,$$

ou

$$K = r \sin \alpha \cos \alpha;$$

par conséquent, en employant la formule du numéro précédent, on aura

$$X' = n' \cos u \sin \alpha - \int r \sin \alpha \cos u \sin \alpha du = n' \cos u \sin \alpha - r \sin u \sin \alpha,$$

$$Y' = n' \sin u \sin \alpha - \int r \sin \alpha \sin u \sin \alpha du = n' \sin u \sin \alpha + r \cos u \sin \alpha,$$

$$Z' = r \cos \alpha u,$$

pour les équations de la surface cherchée.

On reconnaît sans peine que cette surface est engendrée par une droite constamment parallèle au plan des xy qui se meut en restant tangente au cylindre dont le rayon est r , et en s'appuyant sur une hélice tracée sur ce cylindre, ayant pour pas $2\pi r \cot \alpha$ et pour origine le point de la base du cylindre qui correspond à $u = \frac{\pi}{2}$.

95. Cherchons en second lieu toutes les surfaces gauches qui peuvent se développer sur l'hélicoïde gauche à plan directeur. Les équations de l'hélicoïde sont, comme l'on sait,

$$X = n \cos u, \quad Y = n \sin u, \quad Z = au,$$

a étant une constante; de là on tire aisément

$$U = a^2, \quad U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 1,$$

et

$$K = a,$$

d'où

$$x' = a \int A du,$$

$$y' = a \int B du,$$

$$z' = a \int C du,$$

et, par conséquent,

$$X' = a \int A du + n' \cos \theta \cos \omega,$$

$$Y' = a \int B du + n' \cos \theta \sin \omega,$$

$$Z' = a \int C du + n' \sin \theta,$$

pour les équations de la surface.

Il ne faut pas perdre de vue que θ doit être considérée comme une fonction arbitraire de u , et que ω , A , B , C sont déterminés par les formules

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\theta^2 + \cos^2 \theta d\omega^2 = du^2, \\ A = \sin \omega \frac{d\theta}{du} - \sin \theta \cos \theta \cos \omega \frac{d\omega}{du}, \\ B = -\cos \omega \frac{d\theta}{du} - \sin \theta \cos \theta \sin \omega \frac{d\omega}{du}, \\ C = \cos^2 \theta \frac{d\omega}{du}. \end{array} \right.$$

96. On reconnaît aisément, au moyen des formules que nous venons d'obtenir, que les surfaces gauches qui peuvent se développer sur l'hélicoïde gauche à plan directeur sont engendrées par des droites qui, se mouvant sur des courbes dont la seconde courbure est constante et égale précisément à la courbure de l'hélicoïde, restent d'ailleurs constamment perpendiculaires au plan osculateur de ces courbes. Ce résultat s'explique aussi en remarquant que, lorsque deux surfaces gauches sont développables l'une sur l'autre, leurs lignes de striction doivent être des lignes conjuguées. Or la ligne de striction de l'hélicoïde gauche est la directrice rectiligne qui est perpendiculaire aux génératrices : donc déjà, dans les surfaces gauches développables sur l'hélicoïde, les lignes de striction doivent être perpendiculaires aux génératrices rectilignes, et par conséquent doivent avoir leurs plans oscula-

teurs perpendiculaires à ces génératrices ; de plus, dans le cas où les génératrices rectilignes d'une surface gauche sont perpendiculaires aux plans osculateurs de la courbe de striction, l'angle de deux génératrices infiniment voisines, qui est la mesure de la seconde courbure de la ligne de striction, mesure aussi la courbure de la surface, d'après, par exemple, ce qui a été dit n° 47 ; on voit donc que cet angle doit être constant quand on considère des surfaces pouvant s'appliquer sur l'hélicoïde.

97. Il résulte de la remarque précédente que les courbes qui ont leur seconde courbure constante et égale à a sont déterminées par les équations

$$x = a \int A du,$$

$$y = a \int B du,$$

$$z = a \int C du,$$

A, B, C étant des fonctions de u que l'on déduira des équations (b), après avoir donné à θ une valeur arbitraire fonction de u .

Si l'on suppose θ constant, on doit trouver une hélice ; en effet, on a alors

$$d\theta = 0, \quad d\omega = \frac{du}{\cos \theta}, \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{u}{\cos \theta},$$

$$A = -\sin \theta \cos \frac{u}{\cos \theta},$$

$$B = -\cos \theta \sin \frac{u}{\cos \theta},$$

$$C = \cos \theta;$$

d'où

$$x = -a \sin \theta \int \cos \frac{u}{\cos \theta} du = -a \sin \theta \cos \theta \sin \frac{u}{\cos \theta},$$

$$y = -a \sin \theta \int \sin \frac{u}{\cos \theta} du = a \sin \theta \cos \theta \cos \frac{u}{\cos \theta},$$

$$z = a \cos \theta \cdot u,$$

ce qui représente bien une hélice tracée sur le cylindre de rayon $a \sin \theta \cos \theta$ et ayant pour pas $2\pi a \cos^2 \theta$.

On aurait encore trouvé une hélice en assujettissant la courbe à avoir sa première courbure constante, ce qui eût été facile à exprimer ; car, x, y, z étant connus en fonction de u , on peut calculer $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z$, et

puis égal à une constante l'expression

$$\frac{(dx d^2 y - dy d^2 x)^2 + (dy d^2 z - dz d^2 y)^2 + (dz d^2 x - dx d^2 z)^2}{ds^6}$$

du carré de la courbure, d'où l'on déduit θ .

On pourrait enfin, pour déterminer θ , assujettir la courbe à des conditions d'un autre genre ; ainsi on pourrait exiger que la courbe fût située sur une sphère : dans ce cas, en se rappelant le rayon de la sphère osculatrice d'une courbe, il faudrait exprimer que, ρ et r étant les rayons de première et seconde courbure de la courbe, on a

$$\rho^2 + r^2 \frac{d\rho^2}{ds^2} = a^2, \quad \text{ou} \quad \rho = a \sin \frac{s}{r},$$

a^2 étant une constante. Portant, dans cette équation, la valeur de ρ en fonction de u , il sera possible de déterminer θ .

§ VIII. — *Propriétés des valeurs sphériques des lignes et des surfaces quelconques.*

98. Considérons sur une surface une ligne quelconque, et imaginons que par les différents points de cette ligne, on mène des normales à la surface dans la région de l'espace que l'on considère comme extérieure à cette surface. Prenons ensuite une sphère de rayon égal à 1, et par son centre tirons des parallèles aux normales à la surface, dans le même sens que ces normales. Nous déterminerons ainsi sur la sphère une courbe qui sera en quelque sorte une perspective de la courbe tracée sur la surface ; l'aire comprise de cette courbe, si elle est formée, sera aussi une représentation de l'aire comprise dans la courbe tracée sur la surface. M. Gauss a eu le premier l'idée de cette reproduction des lignes et des surfaces quelconques sur une sphère, et on lui doit plusieurs résultats assez curieux sur cette matière. Nous allons nous proposer d'établir ces résultats, ainsi que quelques autres plus généraux, par des considérations analogues à celles qui ont été employées dans tout ce qui précède et qui sont beaucoup plus simples que celles dont a fait usage l'illustre géomètre.

99. Soit AmB une courbe quelconque tracée sur une surface (*fig. 29*).

Considérons deux points infiniment voisins m et m' de cette ligne, et en ces points menons des normales mN , $m'N'$ extérieures à la surface. Par un point quelconque O , tirons des parallèles Om_1 , Om'_1 aux lignes mN , $m'N'$, et sur chacune d'elles prenons des longueurs Om_1 , Om'_1 égales à 1 : la droite $m_1m'_1$ sera la valeur de mm' rapportée sur la sphère de rayon 1, ou ce que j'appellerai la valeur sphérique de mm' . Il est clair maintenant que l'angle $m_1Om'_1$ est égal à $m_1m'_1$; d'ailleurs, en appelant α l'angle que l'élément mm' fait avec une des lignes de courbure de la surface considérée au point m , R le rayon de courbure de la surface principale tangente à cette ligne de courbure, et R' le rayon de courbure de la seconde section principale relative au point m , nous avons, d'après la formule du n° 11,

$$\left(\frac{m_1Om'_1}{mm'}\right)^2 = \left(\frac{\cos \alpha}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{R'}\right)^2;$$

donc on a aussi

$$\left(\frac{m_1m'_1}{mm'}\right)^2 = \left(\frac{\cos \alpha}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{R'}\right)^2,$$

ce qui fait connaître le rapport de l'élément mm' à sa valeur sphérique m'_1m_1 . Si la direction de mm' est celle d'une ligne de courbure, $\alpha = 0$, et on a

$$\frac{m_1m'_1}{mm'} = \pm \frac{1}{R},$$

R étant le rayon de courbure de la section principale tangente à mm' , et le signe étant celui de R , c'est-à-dire le signe $+$ quand les deux normales en m et m' se rencontrent dans l'intérieur de la surface, et $-$ quand cette rencontre a lieu à l'extérieur. Du reste, on peut aussi remarquer que le signe répond à une différence de position de l'élément $m_1m'_1$; en effet, on reconnaît aisément qu'il faut prendre le signe $+$ ou le signe $-$, selon que $m_1m'_1$ a une direction identique ou contraire à celle mm' .

100. Supposons que la ligne AmB soit une ligne de courbure de la surface proposée, et considérons, en même temps que l'élément mm' , l'élément suivant $m'm''$ (*fig. 30*); soient mN la normale extérieure à la surface au point m et $m'N'$ la normale extérieure au point m' , de telle sorte que mN soit perpendiculaire à mm' et $m'N'$ à $m'm''$; prolongeons mm' suivant $m'g$, et menons $m'h$ perpendiculaire à $m'N'$ dans le plan $m'mN$: les trois droites

$m'g$, $m'h$, $m'm''$ formeront un trièdre évidemment rectangle suivant $m'g$, et qui nous donnera

$$hm'm'' = gm'm'' \cos \alpha.$$

Nous appelons α l'angle que le plan de $gm'm''$, ou le plan osculateur de la ligne de courbure au point m' , fait avec le plan de $m''m'h$ ou le plan tangent à la surface au même point; ou mieux, pour éviter toute ambiguïté, l'angle que la normale principale de la ligne de courbure, dirigée de cette courbe vers le centre de courbure, fait avec la normale à la ligne de courbure, tracée sur la surface et du côté de la courbe, opposé à celui où se trouve $m'h$. Mais $\widehat{gm'm''}$ est l'angle de contingence de la ligne AmB en m ; $\widehat{gm'm''} \cos \alpha$ est donc, abstraction faite du signe, le produit par mm' de la première courbure géodésique de cette courbe au point m . Appelant donc $\frac{\cos \theta}{\rho}$ cette courbure géodésique, et posant $mm' = dx$, on a

$$hm'm'' = \pm dx \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

Quant au signe à prendre, on reconnaît aisément que c'est le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que $m'h$ n'est pas ou est du côté de $m'm''$ où se trouve la normale à cet élément, qui a servi à déterminer la courbure géodésique, et qui occupe, par rapport à cet élément et à la normale extérieure à la surface, la position ordinaire de la partie positive de l'axe des y , par rapport aux parties positives des axes des x et des z .

On peut se débarrasser du signe qui se trouve dans le second membre de l'égalité précédente, en en donnant un à $hm'm''$, et c'est ce qu'il convient de faire. Appelant donc $d\gamma$ l'angle infiniment petit que forment les deux plans Nmm' et Nmm'' , cet angle étant précédé du signe $+$ quand $m'm''$ est du côté du plan Nmm' où se trouve la perpendiculaire à ce plan, qui occupe par rapport à mm' et mN la position ordinaire de la partie positive de l'axe des y , par rapport aux parties positives des axes des x et des z , et du signe $-$ dans le cas contraire; il est clair que l'on aura

$$d\gamma = - dx \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

101. Rapportons maintenant la ligne AmB sur la sphère de rayon 1, et

soient A, m, B , la représentation de AmB , et m, m'_1, m'_2 la représentation des deux éléments $mm', m'm''$; nous trouverons de même, en appelant $d\gamma_1, \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_1, dx_1$, les valeurs que prennent respectivement $d\gamma, \frac{\cos \theta}{\rho}, dx$, quand on passe de AmB à A, m, B , les deux premiers de ces éléments ayant un signe déterminé d'ailleurs comme il a été dit,

$$d\gamma_1 = -\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_1 dx_1;$$

rapprochant cette formule de la précédente, et observant que, dans tous les cas, $d\gamma = d\gamma_1$, il viendra

$$\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right) dx = \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_1 dx_1.$$

De ce premier résultat, assez remarquable, et qui est susceptible d'un énoncé fort simple, on peut déduire un grand nombre de conséquences.

102. Concevons que l'on ait tracé sur la surface proposée toutes les lignes de courbure, qui, comme l'on sait, forment deux systèmes de lignes orthogonales conjuguées; rapportons ces lignes sur la sphère de rayon 1 : nous obtiendrons, il est facile de le voir, deux nouveaux systèmes de lignes orthogonales conjuguées; faisons passer une ligne par les sommets d'une série de rectangles déterminés par les lignes de courbure de la surface : cette ligne pourra être considérée comme tout à fait quelconque, puisque la loi d'espacement des lignes de courbure peut être prise arbitrairement. Considérons en même temps la ligne qui passe par les sommets des rectangles correspondants sur la sphère, et qui est évidemment la première courbe rapportée sur la sphère. Si nous regardons les lignes de courbure de la surface comme des lignes coordonnées, et que nous appliquions à la courbe quelconque tracée sur la surface la formule (9) du n° 33, il viendra

$$di - \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s ds = -\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_x dx - \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_y dy,$$

en gardant les notations du numéro cité, et faisant les mêmes hypothèses sur le sens suivant lequel on compte les arcs positifs des lignes coordonnées dont les arcs sont représentés par x , et sur celles dont les arcs sont repré-

sentés par γ . Mais nous avons aussi, pour les lignes rapportées sur la sphère de rayon 1,

$$di_1 - \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_{s_1} ds_1 = - \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_{x_1} dx_1 - \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_{y_1} dy_1,$$

$i_1, \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_{s_1}, ds_1$ étant les éléments qui remplacent respectivement les éléments $i, \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s, ds$ relatifs à la ligne considérée quand on passe de cette ligne à celle qui lui correspond sur la sphère, et supposant, hypothèse que du reste nous maintiendrons dans tout ce qui va suivre pour éviter toute espèce de difficulté, que la surface donnée soit convexe tout le long de la ligne considérée, c'est-à-dire qu'elle ait ses rayons de courbure principaux tous les deux positifs.

Les seconds membres de ces deux égalités sont les mêmes, d'après ce que l'on a vu plus haut; nous en concluons donc que

$$di - \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s ds = di_1 - \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_{s_1} ds_1,$$

d'où en intégrant pour une portion quelconque de la ligne considérée et de la transformée sur la sphère de rayon 1,

$$(1) \quad i'' - i' - \int_{s'}^{s''} \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s ds = i_1'' - i_1' - \int_{s'_1}^{s''_1} \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_{s_1} ds_1,$$

et $i'', s'', i_1'', s_1'', i', s', i_1', s_1'$ étant les valeurs de i, s, i_1 et s_1 aux extrémités de la ligne considérée et de sa transformée.

103. Si l'on considère une ligne fermée, et que l'on suppose les intégrales étendues à tout le contour, on aura

$$i'' = i', \quad i_1'' = i_1',$$

et, par conséquent,

$$\int \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s ds = \int \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_{s_1} ds_1;$$

ce qui montre que si sur une surface convexe on considère un contour fermé quelconque, puis que l'on prenne le contour sphérique correspondant, la somme des produits de la courbure géodésique par l'élément de l'arc aura la même valeur pour les deux contours.

Nous pouvons arriver à un résultat plus général. Considérons sur la surface proposée un polygone formé par des lignes tout à fait quelconques et dont nous représenterons les angles par A, B, C , etc.; rapportons ce polygone sur la sphère de rayon 1, et soient A_1, B_1, C_1 les angles du polygone ainsi obtenu: pour chacun des côtés du polygone nous aurons la relation (1); écrivant toutes ces relations, faisant la somme, il viendra aisément

$$A + B + C + \dots - \int \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right) ds = A_1 + B_1 + C_1 + \dots - \int \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right) ds_1,$$

les intégrales étant étendues à tout le contour des polygones.

104. Passons à la considération des valeurs sphériques des aires déterminées d'une manière quelconque sur une surface.

Prenons d'abord, sur cette surface, un rectangle infiniment petit, déterminé par quatre éléments de lignes de courbure; rapportons-le sur la sphère de rayon 1: nous aurons un second rectangle infinitésimal, dont les côtés seront ceux du premier rapportés sur la sphère; or les surfaces de ces deux rectangles sont chacune représentées par les produits de deux de leurs côtés adjacents, nous pouvons conclure de là, et de ce que nous avons établi plus haut sur le rapport d'un élément de ligne de courbure à la valeur sphérique de cet élément, que le rapport des deux rectangles sera exprimé par le produit des rayons de courbure principaux de la surface en un des points du rectangle considéré sur cette surface. Plus généralement, nous pouvons dire encore que le rapport d'une portion infiniment petite de forme quelconque d'une surface, à la valeur sphérique de cette portion de surface, est le produit des rayons de courbure principaux de la surface en un point de l'élément considéré; car, quelque petit que soit cet élément, on peut toujours le concevoir décomposé en éléments infiniment petits par rapport à lui, et formés par des éléments de ligne de courbure. M. Gauss avait établi ce résultat par le calcul, mais d'une manière assez compliquée. On voit que les considérations géométriques mènent très-rapidement au but (*).

(*) Depuis que ce Mémoire est composé, j'ai vu dans le tome III de la *Correspondance de l'École Polytechnique*, que M. Binet, dans une Note annexée à un Mémoire de M. Olinde Rodrigues, démontrait de la même manière que moi le théorème de M. Gauss. Dans le même endroit, M. Olinde Rodrigues, qui ne connaissait pas ce théorème, y parvient par une méthode analytique fort ingénieuse.

Considérons maintenant une portion finie de surface terminée à une ligne quelconque BC et à deux lignes géodésiques issues du point A (*fig. 31*). Décomposons la surface ABC en éléments, en menant par le point A une suite de lignes géodésiques, et considérons l'élément *Amn* déterminé par deux lignes géodésiques infiniment voisines quelconques *Am* et *An*. La valeur sphérique de ces éléments sera

$$\sigma = \int_0^r \frac{\partial x}{\partial r^2} dr,$$

en conservant les notations du n° 59. Mais, ainsi qu'on l'a vu dans le même paragraphe,

$$\frac{\partial x}{\partial r^2} = - \frac{d^2 \partial x}{dr^2};$$

on a donc

$$\sigma = - \int_0^r \frac{d^2 \partial x}{dr^2} dr = - \left(\frac{d \partial x}{dr} \right)_r + \left(\frac{d \partial x}{dr} \right)_0 = - \frac{\cos \theta}{\rho} \delta x + d\omega,$$

nieuse et qui mérite d'être indiquée; il remarque que l'intégrale

$$\iint \frac{(rt - s^2) dx dy}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qui représente la somme des quotients que l'on obtient en divisant les éléments d'une surface par le produit des rayons de courbure principaux correspondant à ces éléments, peut se mettre sous la forme

$$\iint \frac{dp dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

en observant que

$$rt - s^2 = \frac{dp}{dx} \frac{dq}{dy} - \frac{dp dq}{dy dx};$$

puis en appelant *X* et *Y* les cosinus des angles que la normale extérieure à la surface fait avec les parties positives des axes des *x* et des *y*, sous celle-ci,

$$\iint \frac{\left(\frac{dp}{dX} \frac{dq}{dY} - \frac{dp}{dY} \frac{dq}{dX} \right) dX dY}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}};$$

qui revient à

$$\iint \frac{dX dY}{\sqrt{1 - X^2 - Y^2}},$$

en remarquant que

$$p = \frac{-X}{\sqrt{1 - X^2 - Y^2}}, \quad q = \frac{-Y}{\sqrt{1 - X^2 - Y^2}}.$$

De là on conclut aisément le théorème.

ou bien, en appelant i l'angle positif que la ligne BC fait avec les lignes minima issues du point A, $\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s$ la courbure géodésique de cette même ligne, et ds la différentielle positive de son arc,

$$\sigma = di + d\omega - \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s ds,$$

les conventions sur le sens suivant lequel se comptent les arcs x et r établies au n° 59, étant conservées. Intégrant de B à C, il vient

$$\Sigma = -2\pi + A + B + C - \int_0^s \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s ds,$$

s étant la longueur du côté BC.

105. Si l'on a maintenant une portion de surface tout à fait quelconque, et terminée à un contour polygonal BCDE, on pourra prendre un point dans l'intérieur, et en joignant ce point aux sommets du contour polygonal par des lignes géodésiques, on décomposera l'aire proposée en plusieurs autres analogues à celle que l'on vient de considérer. Appliquant à chacune d'elles la formule précédente et faisant la somme, on verra que *la valeur sphérique d'une portion de surface, terminée à un contour polygonal quelconque, est égale à l'excès de la somme de ses angles, sur autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés moins deux, moins l'intégrale $\int \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s ds$ étendue à tout le contour.* Dans le cas où l'aire est terminée à un contour fermé et ne présentant aucun angle, l'excès de la somme des angles sur autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux doit évidemment être remplacé par quatre droits.

106. M. Gauss, dans le célèbre Mémoire intitulé : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, que nous avons eu occasion de citer tant de fois, ne s'était occupé que de la détermination des valeurs sphériques des aires terminées à des lignes géodésiques de la surface, et il arrivait alors, l'intégrale $\int \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s ds$ étant évidemment nulle, à ce résultat : *La valeur sphérique d'une portion de surface courbe terminée à un contour polygonal quelconque, est égale à l'excès de la somme de ses angles sur autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.* On peut remarquer qu'il

est très-facile de passer du cas particulier de M. Gauss au cas général que nous avons considéré : il suffit, en effet, de circonscrire au contour polygonal quelconque que l'on a à considérer, un polygone infinitésimal formé par des éléments de lignes géodésiques, puis de remarquer que, d'après ce qui a été dit n° 34, l'angle infiniment petit que forment deux lignes géodésiques menées tangentielllement à une courbe, par deux points infiniment voisins, est égal à la distance de ces points multipliée par la courbure géodésique de la courbe en l'un de ces points. *see Gauss p. 192.*

107. Si la surface, jusqu'ici quelconque, sur laquelle est tracé le contour devient une sphère, la valeur sphérique de la portion de surface considérée sera évidemment la valeur même divisée par le carré des rayons de la sphère; de là on peut conclure cette proposition :

Une portion de surface sphérique, terminée à un contour polygonal ou courbe tout à fait quelconque, est égale au carré du rayon multiplié par l'excès de la somme des angles du contour, sur autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux, et sur l'intégrale $\int \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \right) ds$ étendue à tout le contour.

Ce théorème comprend, comme cas particuliers, tous les théorèmes de géométrie élémentaire relatifs à la mesure des aires sphériques.

108. Je terminerai en démontrant un théorème fort curieux, qui n'est qu'une généralisation de la proposition de M. Gauss, relative à la valeur sphérique d'un contour terminé à des lignes géodésiques d'une surface quelconque. Ce théorème, dû à M. Jacobi, s'énonce ainsi : *Si l'on a une courbe fermée tout à fait quelconque, et que par le centre d'une sphère de rayon 1 on mène des rayons respectivement parallèles aux normales principales de la courbe en ses différents points, le lieu des extrémités de ces rayons, qui sera une courbe fermée tracée sur la sphère, divisera cette sphère en deux parties équivalentes.*

Soit AmB (fig. 32) la courbe proposée; imaginons la surface gauche formée par les perpendiculaires aux plans osculateurs de cette courbe, surface qui aura évidemment AmB pour ligne de striction, et considérons la génératrice rectiligne mG de cette surface menée par le point m et prolongée d'un certain côté de la courbe AmB : si, par le centre de la sphère

de rayon égal à 1, nous menons des rayons respectivement parallèles aux normales de la surface gauche et répondant aux différents points de mG , depuis le point m jusqu'à l'infini, nous obtiendrons évidemment un quart de grand cercle m, L_1 . Cela résulte de ce que toutes les normales considérées sont perpendiculaires à une même droite mG , et de ce que le plan tangent en un point de mG tend à devenir perpendiculaire au plan tangent en m à mesure que le point de contact s'éloigne sur mG , d'après une formule du n° 50. Considérons une seconde génératrice rectiligne $m'G'$ de la surface gauche; nous aurons de même un quart de grand cercle m', L'_1 pour le lieu des extrémités des rayons de la sphère de rayon 1, menées respectivement parallèles aux normales de la surface gauche aux différents points de $m'G'$, depuis m' jusqu'à l'infini. De plus, si les deux génératrices mG et $m'G'$ sont infiniment voisines, il est facile de voir que le second quadrant m', L'_1 ira rencontrer le premier en son extrémité L_1 , comme on le voit aisément en remarquant que la normale à la surface gauche, qui a donné le point L_1 , est parallèle à mm' qui est aussi perpendiculaire à $m'G'$, puisque AmB est la ligne de striction de la surface gauche. De là résulte que les différents quadrants $L_1m_1, L'_1m'_1$, etc., sont tangents à une même courbe fermée tracée sur la sphère de rayon 1, en leurs extrémités L_1, L'_1 , etc. D'après cela, le lieu des points m_1, m'_1 , etc., c'est-à-dire le lieu des extrémités des rayons de la sphère de rayon 1, respectivement parallèles aux normales principales mc, m'_1c' , etc., de la courbe AmB , peut être considéré comme obtenu en menant dans toutes les directions des arcs de grand cercle tangents à un contour fermé GL_1H tracé sur la sphère, et prenant sur ces arcs de grand cercle des longueurs égales à un quadrant: donc ce lieu A, m_1, B , des points m_1 divise la sphère en deux parties équivalentes; car, si l'on prolongeait les arcs de grand cercle $L_1m_1, L'_1m'_1$, etc., jusqu'à leur seconde rencontre au-dessous de A, m_1, B , on obtiendrait de ce côté de la courbe des points diamétralement opposés à L_1, L'_1 , etc., qui détermineraient un contour identique à GL_1H , de telle sorte que la portion de la sphère située au-dessous de A, m_1, B , est composée de parties identiques à celles qui sont au-dessus.

NOTE I.

Sur la surface réglée dont les rayons de courbure principaux sont égaux et dirigés en sens contraires.

On sait que l'hélicoïde gauche à plan directeur est la seule surface réglée qui ait en chacun de ses points ses rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires; Meunier a le premier démontré cette proposition remarquable dans son Mémoire sur les surfaces, qui a été inséré au *Recueil des Savants étrangers*. Plus tard Legendre y a été aussi conduit (voir les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1787). Enfin dans ces derniers temps, plusieurs géomètres ont donné, dans le Journal de M. Liouville, des démonstrations nouvelles et plus ou moins simples du même théorème. Toutes les démonstrations connues reposent sur l'intégration des équations aux différences partielles (*). Je me propose, dans cette Note, de faire voir que le théorème dont il s'agit peut être démontré d'une manière géométrique et sans le secours du calcul intégral.

Supposons le problème résolu, et imaginons que l'on trace sur la surface trouvée les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes de cette surface; il est facile de voir 1° que ces courbes seront équidistantes entre elles: c'est là, en effet, une propriété générale des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes des surfaces gauches, que nous avons démontrée dans le Mémoire précédent; et 2° qu'elles auront en chaque point leur plan osculateur tangent à la surface: cette seconde propriété résulte de ce que la somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires l'une à l'autre est pour toute surface égale à la somme des courbures principales, et par conséquent pour la surface considérée, égale à zéro; d'où il suit que les sections normales perpendiculaires aux génératrices ont leurs rayons de courbure infinis.

Soit maintenant AmB (fig. 33) une quelconque des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes; prenons trois points m, m', m'' infiniment voisins sur cette courbe, et menons les génératrices $mG, m'G', m''G''$, dont la première sera perpendiculaire à mm' , et la seconde à $m'm''$. Si nous faisons $mG = m'G' = m''G''$, les lignes $GG', G'G''$ seront deux éléments consécutifs d'une seconde trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes; de telle sorte que le plan $GG'G''$ sera perpendiculaire à la normale GL de la surface au point G , de même que le plan $mm'm''$ est perpendiculaire à la normale mT au point m . Appelons ϕ l'angle que GG' fait avec mm' ; les cosinus des angles que GL perpendiculaire à mG et à GG' fait avec les trois lignes mm', mG, mT que nous considérons comme des axes

(*) Depuis que cette Note est composée, j'ai appris que M. Olivier avait donné, dans ses développements de géométrie descriptive, une démonstration géométrique du théorème de Meunier. Du reste, ma démonstration diffère entièrement de celle de M. Olivier.

des coordonnées, seront respectivement $-\sin \varphi, 0, \cos \varphi$. Évaluons en second lieu les cosinus des angles que $G'G''$ fait avec les mêmes axes : d'abord le cosinus de l'angle que cette droite fait avec mm' est égal, aux infiniment petits près du second ordre, au cosinus de l'angle qu'elle fait avec $m'm''$, c'est-à-dire à $\cos \varphi + d \cos \varphi$ (la différentielle se rapportant à un déplacement effectué sur la courbe AmB) : cela résulte de ce que si par le point m' on mène $m'K$ parallèle à $G'G''$, le plan $Km'm''$ perpendiculaire à la droite $m'G'$ le sera aussi sensiblement au plan $mm'm''$. Puis le cosinus de l'angle que cet élément $G'G''$ fait avec mG est un infiniment petit qu'on peut appeler ε ; par conséquent enfin, le cosinus de l'angle qu'il fait avec mT doit être $\pm (\sin \varphi + d \sin \varphi)$, pour que la somme des carrés des trois cosinus soit égale à l'unité, et même sans ambiguïté, $\sin \varphi + d \sin \varphi$, comme on le voit aisément par la figure. Nous concluons de là que la condition pour que GL soit perpendiculaire au plan $GG'G''$ ou à $G'G''$ revient à

$$-\sin \varphi (\cos \varphi + d \cos \varphi) + \cos \varphi (\sin \varphi + d \sin \varphi) = 0,$$

c'est-à-dire à

$$d\varphi = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi = c.$$

Ainsi l'angle que GG' fait avec mm' , celui que $G'G''$ fait avec $m'm''$, etc., sont tous égaux entre eux quel que soit mG , pourvu que l'on ait

$$mG = m'G' = m''G'' = \dots$$

Je dis maintenant que les rayons de première et de seconde courbure de AmB sont constants. En effet, soient r et R ces deux rayons, de manière que l'angle que forment mG et $m'G'$ ait pour valeur

$$mm' \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}},$$

d'après une formule de Lancret, très-facile à démontrer par la géométrie. Si par le point G on mène $G'n$ parallèle à Gm jusqu'à la rencontre en n du plan Tmm' , le triangle nmm' donnera, en faisant $mG = a$,

$$\frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2}{R^2} = 1 + \frac{GG'^2}{mm'^2} - 2 \frac{GG'}{mm'} \cos \varphi.$$

Mais la projection $GG' \cos \varphi$ de GG' sur le plan osculateur $mm'm''$ est égale évidemment à $mm' \left(1 - \frac{a}{r}\right)$; donc

$$\frac{GG'}{mm'} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{a}{r}\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2}{R^2} = 1 + (1 + \tan^2 \varphi) \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 - 2 \left(1 - \frac{a}{r}\right);$$

d'où

$$\tan \varphi = \pm \frac{ar}{R(r-a)},$$

une seule valeur, dont la séparation est d'ailleurs aisée, devant être prise. Or, a étant quelconque, φ ne pourra avoir la même valeur quel que soit le point de AmB que l'on considère qu'autant que r et R seront eux-mêmes constants; pour le voir clairement, on fait a égal à la valeur de r pour l'un des points de la courbe, ce qui montre que ce premier rayon de courbure est constant; puis on reconnaît sans peine que le second R doit aussi l'être.

Ainsi, comme nous l'avions annoncé, la courbe AmB a ses deux rayons de première et seconde courbure constants; nous pourrions en conclure immédiatement que AmB est une hélice, car on sait qu'il n'y a que l'hélice qui ait ses rayons de première et seconde courbure constants: mais cette propriété se démontre ordinairement par le calcul, et nous pouvons arriver au même résultat géométriquement comme il suit. Considérons la ligne de striction de la surface; dans le cas actuel, cette ligne sera une droite: en effet, elle doit d'abord couper à angle droit toutes les génératrices mG , $m'G'$, $m''G''$, etc., car les distances des points m , m' , m'' , etc., aux points de la ligne de striction situés sur mG , $m'G'$, $m''G''$, etc., ne dépendent, comme l'on sait, que des rayons de première et seconde courbure de AmB aux points m , m' , m'' , etc., et sont, par conséquent, constants: cela nous montre que le plan osculateur $pp'p''$ de cette courbe en un point quelconque p' doit être tangent à la surface gauche; or pp' et $p'p''$ ne peuvent être dans un même plan avec $m'p'$, tout en étant perpendiculaires à cette droite, qu'autant qu'ils sont sur le prolongement l'un de l'autre: ainsi les deux éléments pp' , $p'p''$, et de même les éléments suivants sont sur une même droite. Ceci posé, si l'on projette sur un plan perpendiculaire à la ligne de striction $pp'p''$..., les génératrices mp , $m'p'$, $m''p''$ et la courbe AmB , les génératrices se projettent en vraie grandeur, et par conséquent suivant des droites égales partant toutes de la projection de $pp'p''$..., qui est un point; la courbe AmB se projettera suivant une courbe coupant à angle droit les projections des génératrices, et conséquemment suivant une circonférence: cela montre déjà que la courbe AmB est tracée sur un cylindre droit à base circulaire; puis, si l'on remarque qu'en supposant les éléments pp' , $p'p''$, etc., égaux entre eux, il en est de même de mm' , $m'm''$, etc., et des angles que forment mp et $m'p'$, $m'p'$ et $m''p''$, etc., et, par conséquent, des projections de mm' , $m'm''$, etc., sur le plan de la base du cylindre, on peut conclure que AmB est une hélice. Il est d'ailleurs déjà démontré que la surface gauche considérée est un conoïde: cette surface est donc un hélicoïde gauche à plan directeur.

NOTE II.

Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure des surfaces du second ordre.

M. Joachimstal, dans un Mémoire intéressant publié par le Journal de M. Crelle, tome XXX, et qui a servi de point de départ aux recherches importantes de MM. Liouville et Michaël Roberts, dont il a été dit un mot dans les n^{os} 31 et 32 du Mémoire précédent, a démontré plusieurs propriétés remarquables relatives aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure des surfaces du second ordre. M. Bertrand a ensuite fait connaître quelques propriétés du même genre à la fin de son Mémoire sur les surfaces isothermes (voyez le tome IX du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville). Toutes ces propriétés se déduisent d'une manière extrêmement simple de la théorie des coordonnées elliptiques ; mais il peut être intéressant de savoir les démontrer à priori : c'est ce que je me propose de faire dans cette Note. Je dois faire remarquer qu'il y a quelques points communs entre la méthode que j'emploie et celle de M. Joachimstal.

J'établirai d'abord par une méthode géométrique l'équation différentielle du second ordre que M. Joachimstal a donnée pour représenter une ligne géodésique ou une ligne de courbure d'une surface quelconque.

Remarquons pour cela que si sur une surface on trace une ligne géodésique ou une ligne de courbure AmB , et que l'on considère la normale principale mC au point quelconque m , le cosinus de l'angle α , que cette ligne fera avec la normale à la surface au point m , sera égal, en négligeant les infiniment petits du second ordre, au cosinus de l'angle β , que la même ligne mC fera avec la normale à la surface au point m' infiniment voisin de m , et situé sur AmB . En effet, quand AmB est une ligne géodésique, l'angle α est nul et l'angle β est infiniment petit du premier ordre (il va sans dire que l'on prend mm' comme terme de comparaison des infiniment petits) ; donc $\cos \alpha$ est égal à 1, et $\cos \beta$ ou $1 - \frac{\beta^2}{2} + \dots$ en diffère de $\frac{\beta^2}{2} + \dots$, c'est-à-dire d'un infiniment petit du second ordre.

Si AmB est une ligne de courbure, les normales à la surface aux deux points infiniment voisins m et m' de cette ligne sont dans un même plan perpendiculaire, d'ailleurs, à celui que détermine la normale au point m et la ligne mC : donc les angles α et β que forme mC avec ces deux normales sont égaux, aux infiniment petits près du second ordre ; par suite, les cosinus de ces angles sont aussi égaux avec le même degré d'approximation.

Ceci posé, soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface ; posons

$$d.F(x, y, z) = X dx + Y dy + Z dz,$$

de manière que l'on ait aussi

$$X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

lorsque dx, dy, dz se rapportent à un déplacement infiniment petit effectué sur la surface.

Appelons λ, μ, ν les angles que la normale à cette surface, menée d'un certain côté déterminé, fait avec les parties positives des axes des coordonnées en un point quelconque x, y, z ; nous aurons

$$\cos \lambda = X \Delta, \quad \cos \mu = Y \Delta, \quad \cos \nu = Z \Delta,$$

en posant, pour abréger,

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

le radical ayant un signe déterminé, qui, d'ailleurs, peut être $+$ ou $-$.

Soient aussi λ_1, μ_1, ν_1 , les angles que fait avec les parties positives des axes des coordonnées, la normale principale d'une ligne géodésique, ou d'une ligne de courbure tracée sur la surface, au même point m ; on aura

$$\cos \lambda_1 = \rho \frac{dx}{ds}, \quad \cos \mu_1 = \rho \frac{dy}{ds}, \quad \cos \nu_1 = \rho \frac{dz}{ds},$$

ρ étant le rayon de courbure, ds l'élément de l'arc de la courbe considérée, et les différentielles se rapportant (convention qui sera maintenue dans tout ce qui va suivre) à un déplacement infiniment petit effectué sur cette même courbe. Maintenant on peut avoir aisément $\cos \alpha$ et $\cos \beta$, et on trouve

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \rho \Delta \left(X \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} + Y \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} + Z \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} \right) \\ \cos \beta &= \rho \left[\frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} (X \Delta + d \cdot X \Delta) + \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} (Y \Delta + d \cdot Y \Delta) + \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} (Z \Delta + d \cdot Z \Delta) \right]; \end{aligned}$$

l'égalité de ces deux cosinus exige que

$$\frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} d \cdot X \Delta + \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} d \cdot Y \Delta + \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} d \cdot Z \Delta = 0,$$

ou, développant en remarquant que $\Delta = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$, faisant passer les termes affectés du signe $-$ dans le second membre et divisant par Δ ,

$$dX \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} + dY \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} + dZ \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{\left(X \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} + Y \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} + Z \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} \right) (X dX + Y dY + Z dZ)}{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

ou bien, développant encore, simplifiant au moyen de la relation

$$X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

et multipliant par ds^2 , il vient

$$\begin{aligned} & dX d^2x + dY d^2y + dZ d^2z - (dX dx + dY dy + dZ dz) \frac{dds}{ds} \\ &= \frac{(X d^2x + Y d^2y + Z d^2z)(X dX + Y dY + Z dZ)}{X^2 + Y^2 + Z^2}. \end{aligned}$$

Mais de la relation

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

on déduit

$$X d^2x + Y d^2y + Z d^2z = -dX dx - dY dy - dZ dz.$$

Substituant, divisant par $dX dx + dY dy + dZ dz$, et faisant tout passer dans le premier membre, on a finalement

$$(1) \quad \frac{dX d^2x + dY d^2y + dZ d^2z}{dX dx + dY dy + dZ dz} + \frac{X dX + Y dY + Z dZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} - \frac{dds}{ds} = 0;$$

c'est l'équation différentielle du second ordre que M. Joachimstal a trouvée pour les lignes géodésiques et les lignes de courbure d'une surface quelconque. M. Joachimstal avait déduit cette équation du calcul; la démonstration précédente a l'avantage d'en donner l'interprétation géométrique.

Supposons maintenant que la surface proposée soit du second degré, de telle sorte que

$$F = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b'xy + 2b''xz + 2byz + 2cx + 2c'y + 2c''z - f,$$

$a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', f$ étant des constantes; nous aurons, dans ce cas,

$$dX d^2x + dY d^2y + dZ d^2z = \frac{1}{2} d.(dX dx + dY dy + dZ dz),$$

ou, ce qui revient au même,

$$dX d^2x + dY d^2y + dZ d^2z = d^2X dx + d^2Y dy + d^2Z dz.$$

En effet, on a

$$X = 2(ax + b''y + b'z + c),$$

$$Y = 2(a'y + bz + b''x + c'),$$

$$Z = 2(a''z + b'x + by + c'');$$

donc

$$dX = 2(adx + b''dy + b'dz),$$

$$dY = 2(a'dy + bdz + b''dx),$$

$$dZ = 2(a''dz + b'dx + bdy);$$

et

$$d^2X = 2(ad^2x + b''d^2y + b'd^2z),$$

$$d^2Y = 2(a'd^2y + bd^2z + b''d^2x),$$

$$d^2Z = 2(a''d^2z + b'd^2x + bd^2y);$$

donc

$$dX d^1x + dY d^1y + dZ d^1z = 2 \left[a dx d^1x + a' dy d^1y + a'' dz d^1z + b'' (dy d^1x + dx d^1y) \right. \\ \left. + b' (dz d^1x + dx d^1z) + b (dz d^1y + dy d^1z) \right]$$

et

$$dx d^1X + dy d^1Y + dz d^1Z = 2 \left[a dx d^1x + a' dy d^1y + a'' dz d^1z + b'' (dy d^1x + dx d^1y) \right. \\ \left. + b' (dz d^1x + dx d^1z) + b (dz d^1y + dy d^1z) \right].$$

Cela étant, l'équation (1) s'intègre immédiatement, et il vient

$$(2) \quad \frac{(dX dx + dY dy + dZ dz)(X^2 + Y^2 + Z^2)}{ds^2} = \text{const.}$$

Interprétons ce résultat.

Nous avons posé

$$\cos \lambda = X \Delta, \quad \cos \mu = Y \Delta, \quad \cos \nu = Z \Delta;$$

donc on a

$$d \cdot \cos \lambda = \Delta dX + X d\Delta,$$

$$d \cdot \cos \mu = \Delta dY + Y d\Delta,$$

$$d \cdot \cos \nu = \Delta dZ + Z d\Delta,$$

ce qui donne

$$\Delta (dx dX + dy dY + dz dZ) = dx d \cdot \cos \lambda + dy d \cdot \cos \mu + dz d \cdot \cos \nu,$$

puisque

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

L'équation (2) devient donc, en se rappelant la valeur de Δ ,

$$(3) \quad \frac{dx}{ds} \frac{d \cdot \cos \lambda}{ds} + \frac{dy}{ds} \frac{d \cdot \cos \mu}{ds} + \frac{dz}{ds} \frac{d \cdot \cos \nu}{ds} = \frac{\text{const.}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or le premier membre est évidemment égal au cosinus de l'angle que la tangente de la ligne géodésique ou de la ligne de courbure considérée au point m dont les coordonnées sont x, y, z , fait avec la normale à la surface au point m' , dont les coordonnées sont $x + dx, y + dy, z + dz$, divisé par ds ou mm' ; ce premier membre n'est donc autre chose que la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la section normale à la surface dirigée suivant la ligne géodésique ou la ligne de courbure. Occupons-nous du second : considérons en même temps que la surface du second degré représentée par l'équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'xz + 2byz + 2cx + 2c'y + 2c''z = f;$$

celle que représente l'équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'xz + 2byz + 2cx + 2c'y + 2c''z = f + \delta f,$$

où δf est infiniment petit, c'est-à-dire la surface homothétique infiniment voisine de la

première; il est facile de voir qu'en appelant δn la distance des deux surfaces au point m , on a

$$\delta n = \frac{\delta f}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il suffit de remarquer que si $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ sont les coordonnées de la seconde extrémité de δn , on a

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = \delta f$$

et

$$\delta x = \delta n \cos \lambda = \delta n X \Delta,$$

$$\delta y = \delta n \cos \mu = \delta n Y \Delta,$$

$$\delta z = \delta n \cos \nu = \delta n Z \Delta;$$

d'où l'on tire aisément la valeur de δn indiquée plus haut. Cela étant, l'équation (3) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{1}{\rho} = \alpha \delta n^3 \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{\beta}{\delta n^3},$$

α et β étant des constantes; et alors nous voyons qu'elle exprime que *pour toute surface du second degré, le rayon de courbure d'une section normale à la surface, cette section étant menée tangentiellement à une ligne géodésique ou à une ligne de courbure, varie pour les différents points de cette ligne, en raison inverse du cube de la distance de la surface à la surface homothétique infiniment voisine.*

On sait que la distance d'une surface du second degré à la surface homothétique infiniment voisine est, pour les mêmes points, en raison inverse de la distance de cette surface à la surface homofocale infiniment voisine. On peut donc dire, en combinant cette propriété, qui est bien connue dans la théorie de l'attraction, avec la précédente, que *pour toute surface du second degré, le rayon de courbure d'une section normale à la surface, cette section étant menée tangentiellement à une ligne géodésique ou à une ligne de courbure, varie pour les différents points de cette ligne, proportionnellement au cube de la distance de la surface à la surface homofocale infiniment voisine.*

Passons maintenant aux propriétés de M. Bertrand.

Désignons, comme plus haut, par la caractéristique d les déplacements infiniment petits effectués sur la courbe AmB , que nous supposons ici être exclusivement une ligne de courbure; représentons, en outre, par la caractéristique δ les déplacements infiniment petits effectués perpendiculairement à la courbe AmB , ou, ce qui revient au même, les déplacements effectués sur les lignes de courbure du système différent de celui dont AmB fait partie. Nous aurons d'abord l'identité

$$\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta s}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta s}\right)^2 = 1,$$

δs étant l'élément d'une ligne de courbure coupant à angle droit la courbe AmB ; d'où, en différentiant suivant la caractéristique d , on a

$$(4) \quad \delta x d \frac{\delta x}{\delta s} + \delta y d \frac{\delta y}{\delta s} + \delta z d \frac{\delta z}{\delta s} = 0.$$

Mais en appelant, comme plus haut, λ, μ, ν les angles que la normale à la surface au point xyz fait avec les parties positives des axes, on a

$$(a) \quad \frac{\delta x}{\delta \cos \lambda} = \frac{\delta y}{\delta \cos \mu} = \frac{\delta z}{\delta \cos \nu} = \frac{1}{R'},$$

R' étant le rayon de courbure de la section principale perpendiculaire à AmB . En effet, si l'on considère les normales à la surface au point m , dont les coordonnées sont x, y, z , et au point n , dont les coordonnées sont $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$, normales qui se rencontrent en un certain point O , puisque mn est un élément de ligne de courbure; puis que l'on prenne sur ces deux normales des longueurs Om' et On' égales à 1, à partir du point O l'élément $m'n'$ sera parallèle à mn , et, par conséquent, la différence des distances des points m et n à l'un quelconque des plans coordonnés sera à la différence des distances analogues, relatives aux points m' et n' , dans le même rapport que $m'n'$ à mn ou dans le rapport de 1 à $Om = R'$; or cette proportionnalité est évidemment exprimée par les équations précédentes.

Portant maintenant les valeurs de $\delta x, \delta y, \delta z$ dans l'équation (4), il vient

$$\delta \cos \lambda d \frac{\delta x}{\delta s} + \delta \cos \mu d \frac{\delta y}{\delta s} + \delta \cos \nu d \frac{\delta z}{\delta s} = 0;$$

mais puisque

$$\cos \lambda = X \Delta, \quad \cos \mu = Y \Delta, \quad \cos \nu = Z \Delta,$$

on a

$$\delta \cos \lambda = \Delta \delta X + X \delta \Delta,$$

$$\delta \cos \mu = \Delta \delta Y + Y \delta \Delta,$$

$$\delta \cos \nu = \Delta \delta Z + Z \delta \Delta.$$

Substituant, on a simplement

$$(5) \quad \delta X d \frac{\delta x}{\delta s} + \delta Y d \frac{\delta y}{\delta s} + \delta Z d \frac{\delta z}{\delta s} = 0.$$

En effet, la normale à la surface au point m est non-seulement perpendiculaire à l'élément mn , mais encore à ce que devient mn , quand on passe du point m au point m' infiniment voisin de m et situé sur AmB , d'après le théorème de M. Dupin; par conséquent, l'on a

$$X d \frac{\delta x}{\delta s} + Y d \frac{\delta y}{\delta s} + Z d \frac{\delta z}{\delta s} = 0.$$

Développant l'équation (5), on trouve

$$\frac{\delta X d \delta x + \delta Y d \delta y + \delta Z d \delta z}{\delta X \delta x + \delta Y \delta y + \delta Z \delta z} - \frac{d \delta s}{\delta s} = 0;$$

mais quand la surface considérée est du second degré, on a, il serait facile de le vérifier comme on a fait plus haut,

$$\delta X d.\delta x + \delta Y d.\delta y + \delta Z d.\delta z = \frac{1}{2} d.(\delta X \delta x + \delta Y \delta y + \delta Z \delta z).$$

On peut alors intégrer, et il vient

$$\frac{\delta X \delta x + \delta Y \delta y + \delta Z \delta z}{\delta s^2} = C,$$

C étant une constante arbitraire; ou bien, introduisant $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ au lieu de X, Y, Z, et remarquant que

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0,$$

on a

$$\frac{\delta \cos \lambda \delta x + \delta \cos \mu \delta y + \delta \cos \nu \delta z}{\Delta \delta s^2} = c,$$

ou bien encore, en vertu des relations (a),

$$\frac{1}{R'} = \frac{c}{\Delta} = c (X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}};$$

d'où enfin

$$R' = \frac{\alpha}{\delta n},$$

α étant une nouvelle constante, et δn représentant, comme tout à l'heure, la distance de la surface du second degré considérée à la surface homothétique infiniment voisine, pour le point x, y, z .

Cela nous montre que, *suivant une même ligne de courbure d'une surface du second degré, le rayon de courbure de la section principale qui lui est perpendiculaire, varie dans le rapport inverse de la distance de la surface considérée à la surface homothétique infiniment voisine.*

Par conséquent aussi, d'après une remarque faite plus haut, *suivant une même ligne de courbure d'une surface du second degré, le rayon de courbure de la section principale qui lui est perpendiculaire, varie dans le même rapport que la distance de la surface considérée à la surface homofocale infiniment voisine.*

Combinant ces deux propriétés de M. Bertrand avec celles de M. Joachimstal, on voit encore que *suivant toute ligne de courbure d'une surface de second degré, le rayon de courbure principal correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal.* C'est la propriété que j'ai démontrée directement dans le XXX^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, pour toutes les surfaces faisant partie d'un système triple de surfaces isothermes, et qui m'a servi à simplifier la démonstration du théorème important que l'on doit à M. Lamé et d'après lequel les surfaces du second degré homofocales sont les seules surfaces susceptibles de former un système triple de surfaces isothermes.

Considérons maintenant, sur une surface du second degré quelconque, un quadrilatère fini formé par quatre lignes de courbure. Soit $AA_1A_2A_3$ ce quadrilatère; appelons a, a_1, a_2, a_3 les distances de la surface proposée à la surface homofocale infiniment voisine, aux points A, A_1, A_2, A_3 ; soient enfin $\rho, \rho'; \rho_1, \rho'_1; \rho_2, \rho'_2; \rho_3, \rho'_3$ les rayons de courbure principaux de la surface aux mêmes points, les lettres sans accent servant à désigner les rayons de courbure correspondants aux sections principales, tangentes aux lignes de courbure du même système que AA_1 : nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{a^2}{a_1^2}, \quad \frac{\rho'}{\rho'_1} = \frac{a}{a_1};$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{\rho'_1}{\rho'_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2};$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{a_2^2}{a_3^2}, \quad \frac{\rho'_2}{\rho'_3} = \frac{a_2}{a_3};$$

$$\frac{\rho_3}{\rho} = \frac{a_3}{a}, \quad \frac{\rho'_3}{\rho'} = \frac{a_3^2}{a^2}.$$

Multipliant membre à membre les égalités de la première ou de la seconde colonne verticale, on a

$$a^2 a_2^2 = a_1^2 a_3^2,$$

ou

$$\frac{a}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}.$$

Ainsi, si sur une surface du second degré on considère un rectangle fini formé par quatre lignes de courbure, les distances des sommets de ce rectangle à la surface du second degré homofocale infiniment voisine, forment une proportion.

C'est la première des propriétés que M. Bertrand a reconnues à toutes les surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple de surfaces isothermes (voyez le Journal de M. Liouville, tome IX).

Quant à la seconde de ces propriétés, qui consiste, comme l'on sait, en ce que toute surface du second degré peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, j'aurai besoin, pour l'établir, de supposer connu le théorème de M. Binet, d'après lequel les lignes de courbure d'une surface du second degré ne sont autre chose que les intersections de cette surface avec les surfaces du second degré homofocales qui ne sont pas de même nature qu'elle; du reste, on sait que ce dernier théorème peut se déduire très-simplement de l'équation (3), comme l'a fait M. Joachimstal, ou plus simplement M. Chelini (voyez la *Revue scientifique italienne*).

Ceci posé, soit une surface du second degré; supposons-la découpée en rectangles infiniment petits, par ses lignes de courbure, et considérons un de ces rectangles $abcd$. Le côté ab sera un élément d'une ligne de courbure ax , non-seulement de la surface du second degré proposé, mais encore d'une surface du second degré homofocale, coupant

la première à angle droit, et que nous appellerons, pour simplifier le discours, surface S . De même le côté ac sera un élément d'une seconde ligne de courbure ay de la surface proposée et d'une surface du second degré homofocale S' , qui coupe la première à angle droit. Appelons ρ le rayon de courbure au point a de la section principale faite dans la surface S , tangentiellement à sa ligne de courbure ax , et ρ' le rayon de courbure au même point de la section principale faite dans la surface S' , tangentiellement à la ligne de courbure ay : le rapport

$$\frac{ac^3}{\rho}$$

devra garder la même valeur, d'après un théorème démontré plus haut, lorsqu'au lieu du point a on considérera tout autre point de la ligne ax , ac étant toujours la distance de la ligne de courbure ax à la ligne de courbure infiniment voisine de la surface proposée et appartenant au même système qu'elle; cela prouve qu'en représentant par la caractéristique d les accroissements infiniment petits effectués sur ax , on a

$$\frac{3ac^3 d \cdot ac}{\rho} + \frac{ac^3}{ac} \cdot d \frac{1}{\rho} = 0,$$

d'où

$$d \frac{1}{\rho} = -3 \frac{d \cdot ac}{ac \cdot \rho},$$

d'où

$$\frac{d \cdot \frac{1}{\rho}}{ab} = -3 \frac{d \cdot ac}{ab \cdot ac} \frac{1}{\rho}.$$

Mais en supposant que ab soit égal au déplacement correspondant à l'accroissement indiqué par d , on a

$$\frac{d \cdot ac}{ab \cdot ac} = -\frac{1}{\rho};$$

donc

$$\frac{d \frac{1}{\rho}}{ab} = 3 \frac{1}{\rho \rho'}.$$

On trouverait de même, en indiquant par δ un accroissement correspondant au déplacement ac effectué sur ay ,

$$\frac{\delta \frac{1}{\rho'}}{ac} = -3 \frac{1}{\rho \rho'}; \quad (*)$$

(*) Les signes s'expliquent par ce qui a été dit tant de fois dans le Mémoire, § III et autres.

de là nous pouvons conclure

$$\frac{d\frac{1}{p}}{ab} + \frac{\delta\frac{1}{p'}}{ac} = 0.$$

Or c'est là la condition pour que les deux systèmes de lignes orthogonales que l'on considère sur la surface proposée, puissent découper cette surface en carrés infiniment petits, comme je l'ai fait voir au n° 36 du Mémoire précédent, ou mieux, dans mon Mémoire sur les surfaces isothermes, inséré dans le XXX^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*; la seconde propriété de M. Bertrand est donc aussi démontrée.

REMARQUE

SUR

UN MÉMOIRE DE M. BERTRAND;

PAR M. J.-A. SERRET.

Dans un Mémoire qui fait partie du XXX^e cahier de ce Journal (1), M. Bertrand a démontré ce beau théorème :

Si une fonction de n lettres a moins de n valeurs, elle n'en a au plus que deux.

Ce théorème, qui n'a pas lieu pour $n = 4$, avait été démontré auparavant par M. Cauchy pour le cas de n premier ou égal à 6.

La démonstration de M. Bertrand exige qu'entre $\frac{n}{2}$ et $n - 2$ il y ait un nombre premier p : ce fait a été vérifié pour les valeurs de n supérieures à 7, jusqu'à 6000000; mais comme il n'a pas lieu pour $n = 6$, M. Bertrand a cru son raisonnement en défaut pour ce cas particulier. Ayant eu l'occasion d'enseigner cette théorie à la Faculté des Sciences, j'ai reconnu que si $\frac{n}{2}$ est un nombre premier, on peut prendre $p = \frac{n}{2}$, sans que la démonstration éprouve aucune modification. Le lemme suivant, sur lequel est fondé le théorème principal, continue en effet d'avoir lieu :

Si une fonction de n lettres a moins de n valeurs, on pourra former deux groupes, l'un de p , l'autre de deux lettres tels, que la fonction ne soit pas changée par une permutation circulaire opérée sur l'un de ces groupes.

Seulement ce lemme serait en défaut dans le cas où l'on prendrait $p = \frac{n}{2}$ si, au lieu de ces mots, *a moins de n valeurs*, on mettait ceux-ci, *n'a pas*

(1) *Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme.*

plus de n valeurs; d'où il suit qu'on ne peut plus dire avec M. Bertrand, dans le cas de $p = \frac{n}{2}$, si une fonction de n lettres a n valeurs, elle est symétrique par rapport à $n - 1$ lettres. Cette dernière assertion est la seule qui ne soit pas démontrée par la méthode de M. Bertrand lorsque entre $n - 2$ et $\frac{n}{2}$ il n'y a pas de nombre premier, mais que $\frac{n}{2}$ est premier. On sait d'ailleurs que cette assertion est inexacte pour les fonctions de six lettres.

On voit par cette remarque que les recherches de M. Bertrand rendent inutile la démonstration ingénieuse, mais bien compliquée, de M. Cauchy pour les fonctions de six lettres, puisque $\frac{6}{2}$ ou 3 est un nombre premier.

NOTE

SUR LA

THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS;

PAR M. J. BERTRAND.

La découverte du principe de d'Alembert, et surtout l'ouvrage admirable dans lequel Lagrange développa les conséquences de ce principe, semblent avoir mis fin aux problèmes ingénieux que les géomètres se proposaient par défi sur des questions de mécanique. On pourrait même ajouter que, trop souvent, après avoir étudié la mécanique analytique, on croirait faire une chose inutile en cherchant à compléter l'étude de cette science par la lecture des travaux épars dont les prédécesseurs de Lagrange ont enrichi les recueils académiques du XVIII^e siècle. Je crois que cette tendance, malheureusement très-générale, est de nature à nuire aux progrès de la mécanique, et qu'elle a déjà produit de fâcheux résultats: la trop grande habitude de tout déduire des formules fait perdre jusqu'à un certain point le sentiment net et précis des vérités mécaniques considérées en elles-mêmes; et si la science a gagné d'une manière incontestable à l'introduction de ces méthodes si générales, on peut dire que, par compensation, chaque question doit néanmoins se présenter sous un jour moins lumineux, et qu'enfin les procédés analytiques dont on fait aujourd'hui un si grand usage sont plus propres à convaincre l'esprit qu'à l'éclairer, en lui permettant de suivre d'une manière intuitive les relations des effets avec les causes.

Ces réflexions ne se sont jamais présentées à moi avec plus de force qu'après la lecture successive de deux Mémoires dans lesquels le même sujet est traité, à près de cent ans de distance, par Clairaut et par M. Coriolis.

M. Coriolis, en s'occupant à deux reprises différentes de la théorie des mouvements relatifs, s'est rencontré, sans le savoir, avec l'illustre Clairaut, qui, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1742, avait résolu plusieurs problèmes, en faisant précisément usage du principe de M. Co-

riolis. Mais ce principe qui, dans le Mémoire plus récent n'est démontré que par des calculs compliqués, semble à Clairaut tellement évident, qu'il néglige d'entrer dans le détail des raisonnements synthétiques qui l'y ont conduit, et se borne à en énoncer en quelques lignes le principe. Ce qui donne encore plus d'intérêt à ce rapprochement, c'est que Clairaut qui, dans l'application de son théorème, ne commet aucune erreur, l'énonce cependant d'une manière inexacte, que l'on peut d'ailleurs corriger en suivant avec soin le raisonnement rapide par lequel commence son Mémoire.

Ainsi se trouvent mis en évidence, de la manière la plus nette, les avantages et les dangers que présentent en mécanique les raisonnements à priori : ils sont la plupart du temps plus rapides, toujours plus satisfaisants pour l'esprit ; mais Clairaut lui-même est exposé à s'y tromper.

Le but que je me propose ici est d'exposer avec détail la démonstration trop peu connue de Clairaut, de la rectifier en montrant pourquoi le théorème dont il est question ne s'applique qu'au principe des forces vives, et de faire voir enfin comment, en suivant les idées de Clairaut, on parvient sans aucun calcul à la notion des forces centrifuges composées, introduites par M. Coriolis dans son second Mémoire sur les mouvements relatifs.

I.

Je commencerai par reproduire textuellement le raisonnement de Clairaut pour montrer en quoi il est défectueux :

« Afin de représenter tous les mouvements qu'un plan peut avoir en
 » glissant sur un autre plan, imaginons que le rectangle FGHI soit placé
 » entre deux courbes quelconques AB, CD, et que, pendant qu'on fait mou-
 » voir à volonté l'angle G de ce rectangle dans la courbe AB, l'angle I du
 » même rectangle suive la courbe CD. Supposons maintenant qu'un corps M
 » de ce système, accéléré par la gravité ou par d'autres forces quelconques,
 » décrive par la nature de ce système la courbe $M\mu$, pour trouver la force
 » accélératrice ou retardatrice que le mouvement du plan FGHI donnera à
 » ce système ; voici ce qu'il faut faire :

» On commencera par tracer la courbe PQ que le point M décrirait pen-
 » dant le mouvement de FGHI si ce point M était fixe dans le plan FGHI ;
 » on déterminera ensuite la vitesse avec laquelle il se mouvrait dans cette

» ligne, ce qui ne dépendra que de la vitesse donnée de G et des courbes
 » AB, CD. Cela fait, on cherchera les forces accélératrices qu'il faudrait
 » supposer répandues dans l'espace ABCD, pour que le corps M, abandonné à lui-même avec la vitesse qu'il a en M par Mm , parcourût la ligne
 » PQ. Que MS, par exemple, représente ce que cette force accélératrice
 » serait en M, je dis qu'en prolongeant MS et prenant MT qui lui soit égale,
 » cette droite MT représente la force par laquelle le mouvement du plan
 » FGHI altère la vitesse de M par $M\mu$.

» Pour le prouver, je commence par distinguer le corps M du point fixe
 » de FGHI qui lui répond, et je nomme ce point fixe M' ; je remarque ensuite
 » que si, dans l'instant que le corps M vient de parcourir $M\mu$ et M' , $M'm$,
 » on venait à ôter les courbes AB, CD, et qu'on laissât le plan FGHI se
 » mouvoir uniformément et en ligne droite, avec la vitesse de M' par $M'm$,
 » il arriverait nécessairement que le système qui est sur ce plan FGHI se
 » mouvrait de la même manière que si ce plan était fixe. A cette observation,
 » je joins celle-ci, que la raison pour laquelle le mouvement par l'arc Mm
 » est altéré par le mouvement curviligne du plan FGHI, c'est que pour
 » former ce mouvement curviligne, il faut imaginer qu'à l'instant que M'
 » vient de parcourir $M'm$, il reçoit une impulsion MS que le corps ne reçoit
 » pas; car, si le corps M recevait cette impulsion, le mouvement du système
 » serait absolument le même que si FGHI était fixe. Cela posé, je dis
 » qu'il revient au même que M' reçoive une impulsion, sans que M la reçoive,
 » ou que M la reçoive en sens contraire, et que M' n'en reçoive
 » aucune.

» Donc, on peut regarder le plan FGHI comme fixe, et supposer que
 » le corps, outre les forces accélératrices qui l'animaient avant le mouvement
 » de FGHI, souffre de plus l'action des forces données MT. »

II.

Le raisonnement que je viens de transcrire est tellement concis, qu'on a quelque peine à voir, d'une manière précise, quelle portée Clairaut a prétendu donner à son théorème; il semble évident, en outre, que l'illustre géomètre a plutôt voulu indiquer la nature des considérations qui l'ont guidé que les exposer avec détail. En étudiant ce passage avec soin, on peut ce-

pendant se convaincre que la phrase que j'ai soulignée, exprime une idée inexacte. On sait, en effet, fort bien, qu'un *système* abandonné à lui-même ne se meut pas d'un mouvement rectiligne et uniforme; c'est pour cette raison que la conclusion à laquelle parvient Clairaut n'est pas exacte. On doit aussi remarquer que bien des détails essentiels sont omis, et notamment tous ceux qui devraient se rapporter à l'influence des liaisons qui peuvent exister entre les différents points du système mobile. Je vais essayer, comme je l'ai dit, de corriger ces inexactitudes et de réparer ces omissions.

Au lieu de considérer, comme Clairaut, le mouvement sur un plan mobile, je supposerai généralement qu'un système de forme invariable soit animé d'un mouvement quelconque; je considérerai le mouvement d'un point M , *qui ne soit aucunement lié à ce système*, et dont nous prendrons la masse pour unité. Je chercherai quelles forces on doit adjoindre à celles qui le sollicitent réellement, pour pouvoir déterminer son mouvement par rapport au système mobile, comme si celui-ci était fixe. Quand on étudie le mouvement d'un point par rapport à des axes fixes, on sait que les composantes des forces qui le sollicitent représentent précisément les coefficients différentiels de la vitesse suivant les trois axes; ce sont donc ces coefficients différentiels qu'il faut calculer ici, et les forces cherchées seront ce que l'on doit ajouter aux forces accélératrices qui sollicitent le point M pour obtenir leur expression : or on peut, sans changer la valeur de ces coefficients, imprimer un mouvement commun au point M et au système mobile. Il semblerait naturel de choisir ce mouvement de telle manière que les axes mobiles conservassent, pendant un temps infiniment petit, la même position; mais nous parviendrons au même but en faisant seulement en sorte qu'ils se meuvent parallèlement à eux-mêmes d'un mouvement rectiligne et uniforme, car on sait, et il est d'ailleurs évident, qu'un pareil mouvement des axes de coordonnées altère les vitesses, par rapport à ces axes, d'une quantité constante, et ne change par conséquent en rien leurs coefficients différentiels.

Remarquons que les axes mobiles qui doivent définir le mouvement du système dont ils font partie peuvent être choisis arbitrairement. On peut donc supposer qu'à un instant donné, leur origine coïncide avec la position du point M ; désignons cette origine par M' . Au bout d'un temps infiniment petit dt , elle aura décrit un arc de courbe $M'P'$, tandis que le point mo-

bile M sera venu de M' en P . Pendant ce temps les axes auront changé de direction, et quel que soit ce changement, on sait qu'il peut être considéré comme une rotation infiniment petite effectuée autour d'un axe passant par l'origine : si donc nous voulons que les axes aient un mouvement uniforme de translation dans l'espace, et que l'origine décrive une ligne droite, il faut imprimer au système, autour d'un axe instantané passant par le point P' , une rotation égale et contraire à celle qu'il a exécutée réellement, et, de plus, supposer à tous les points un mouvement commun suivant des droites égales et parallèles à $P'K$, de telle manière que le point M' , au lieu de venir en P' , vienne se placer en K sur la tangente à la courbe $M'P'$ à une distance $M'K$ égale à celle que la vitesse acquise lui ferait parcourir dans le temps dt ; et, en supposant que le point M participe à ces deux mouvements, rien ne sera changé dans son mouvement par rapport aux axes mobiles, et par conséquent les coefficients différentiels de sa vitesse, parallèlement à ces axes, seront précisément égaux à ceux que nous voulons calculer. Or ces deux mouvements, que nous devons imprimer au point M , le déplacent l'un et l'autre de quantités infiniment petites du second ordre; on peut donc les supposer produits par deux forces agissant pendant le temps dt , et dont il est facile d'apprécier la valeur. La première, celle qui correspond au mouvement de rotation, est évidemment perpendiculaire au plan qui passe par l'axe instantané et par la direction de la vitesse relative; cette force doit, de plus, être capable de faire parcourir, dans le temps dt , un arc infiniment petit du second ordre ayant pour angle ωdt , ω étant la vitesse de rotation du système mobile autour de l'axe instantané, et pour rayon $v dt$, v étant la projection de la vitesse relative sur un plan perpendiculaire à cet axe : or un pareil arc égal à $\omega v dt^2$ est parcouru sous l'influence d'une force $2\omega v$; telle est donc la première des forces par laquelle on doit supposer le point M sollicité : c'est la force centrifuge composée de Coriolis. Quant à la seconde, il faut qu'elle soit capable d'amener le point M' de P' en K ; on voit sans peine qu'elle est égale et contraire à celle qui devrait solliciter un point libre pour qu'il restât invariablement lié au système, en supposant qu'il soit placé en M' avec la vitesse actuelle de ce point M' . Si donc nous ajoutons ces deux forces à celles qui sollicitent le point M , nous pourrions regarder les axes comme se mouvant parallèlement à eux-mêmes d'un mouvement

rectiligne et uniforme, et, par conséquent, les équations du mouvement comme étant les mêmes que par rapport à des axes fixes.

Nous avons donc, dans le cas d'un point isolé qui n'est nullement lié aux axes mobiles, le théorème suivant qui est précisément celui de M. Coriolis : Pour avoir les équations du mouvement relatif d'un point, il faut ajouter aux termes existants pour le mouvement absolu, d'abord ceux qui proviennent de la force égale et contraire à celle qui forcerait le point considéré à rester invariablement lié aux axes mobiles, et, en outre, ceux qui proviendraient d'une force perpendiculaire à la vitesse relative et à l'axe instantané de rotation des axes mobiles, égale au double du produit de la vitesse angulaire de rotation des axes mobiles, par la vitesse relative projetée sur un plan perpendiculaire à cet axe.

III.

Le cas d'un point entièrement libre comprend implicitement tous les autres ; quelle que soit, en effet, la nature des liaisons qui définissent le système dont on cherche le mouvement, liaisons qui peuvent établir, en outre, une dépendance entre ce système et celui des axes mobiles, on peut toujours regarder chaque point comme complètement isolé et libre, pourvu qu'on adjoigne aux forces qui le sollicitent, des forces nouvelles de direction déterminée, mais d'intensité inconnue, qui représentent l'action que peuvent exercer les liaisons. Or, en supposant toutes ces forces de liaisons connues, et chaque point devenu libre, nous pourrions appliquer le théorème précédent à la recherche de son mouvement, et nous aurons ainsi des équations différentielles, qui seront en nombre égal à celui des coordonnées des points du système ; ces équations seront précisément celles qu'on eût dû écrire, si les axes mobiles avaient été fixes, et qu'on eût ajouté aux forces accélératrices de chaque point les deux forces définies par le théorème de M. Coriolis. Il est inutile d'indiquer comment ces équations différentielles, jointes aux équations de liaisons et aux circonstances initiales, définissent complètement les coordonnées en fonction du temps, et permettent, en outre, de déterminer les coefficients inconnus introduits comme facteurs dans les composantes des forces de liaison ; cette discussion se trouve dans tous les *Traité*s de mécanique, et il n'y aurait rien à y changer dans le cas actuel.

MÉMOIRE

SUR LA

PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS LES CRISTAUX;

PAR M. J.-M.-C. DUHAMEL.

Dans un Mémoire présenté en 1828 à l'Académie, j'ai fait connaître les équations générales qui règlent le mouvement de la chaleur dans les corps solides, dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens. J'ai démontré que, dans les corps constitués de la même manière en chaque point, mais dont la conductibilité pouvait varier suivant une loi quelconque avec la direction, il existait toujours trois axes principaux, rectangulaires, uniques en général, et en nombre infini quand il y en a plusieurs systèmes. Ces axes jouissent d'une propriété physique remarquable, d'après laquelle je les ai définis; leur propriété analytique est de donner une forme simple à l'équation de la propagation de la chaleur, quand on les prend pour axes de coordonnées. Dans ce même Mémoire se trouvent traitées plusieurs questions dont les résultats étaient susceptibles d'être vérifiés par l'expérience, et pouvaient, par suite, conduire à la valeur des constantes relatives à chaque substance en particulier.

Quelque temps après, MM. de la Rive et Alphonse de Candolle firent connaître quelques expériences relatives à la conductibilité de diverses espèces de bois, dans le sens de leurs fibres et dans des sens perpendiculaires. Elles indiquaient une grande différence de conductibilité pour une même espèce de bois dans ces différents sens; mais quelque intéressantes qu'elles fussent, elles n'étaient pas assez multipliées, ni faites dans des circonstances assez variées pour conduire à la détermination des conductibilités principales.

Les recherches de M. de Senarmont ont un caractère différent: elles n'ont pas précisément pour objet la détermination des coefficients spécifiques, mais des lois générales suivant lesquelles la chaleur se propage dans

les corps régulièrement cristallisés, et les rapports des axes principaux de conductibilité avec les axes optiques et la forme cristalline de ces corps.

Toutes les déductions de l'auteur sont fondées sur les résultats de ses expériences, et ce n'est qu'avec une certaine réserve qu'il se prononce sur la nature des surfaces ou des courbes d'égale température. Il m'a paru qu'il ne serait pas sans intérêt d'appliquer le calcul à cet important sujet de recherches, et d'en déduire la détermination exacte de ce que l'expérience ne pouvait donner qu'à peu près.

J'ai considéré d'abord un solide indéfini dans tous les sens, constitué de la même manière en chaque point, mais dont la conductibilité variait avec la direction, suivant une loi arbitraire. Ce solide étant à une même température en tous ses points, j'ai supposé qu'on y introduisait dans une portion infiniment petite en tout sens, une certaine quantité de chaleur, qui élevait d'une manière quelconque la température de chacun de ses points; et j'ai cherché l'expression générale qui fait connaître à chaque instant la température d'un point quelconque du solide.

Parmi les diverses conséquences qui peuvent s'en déduire, j'indiquerai la suivante :

« A une époque quelconque, les surfaces isothermes forment une série
 » continue d'ellipsoïdes semblables, dont les axes sont dirigés suivant les
 » axes principaux de conductibilité, menés par le point primitivement
 » échauffé, et sont proportionnels aux racines carrées des conductibilités
 » principales. »

Je désigne, pour abréger, ces ellipsoïdes sous le nom d'*ellipsoïdes principaux*.

J'ai considéré ensuite le cas beaucoup plus général, où l'on ne se bornerait pas à supposer des températures initiales connues en un point du solide, mais où l'on introduirait en ce point de la chaleur d'une manière continue, et suivant une loi entièrement arbitraire.

L'expression des températures du solide à une époque quelconque peut, dans ce cas, être déterminée au moyen d'une méthode que j'ai fait connaître dans un autre Mémoire, et qui est fondée sur la superposition des systèmes. Mais quant à la détermination des surfaces isothermes, il n'est pas nécessaire d'avoir l'expression des températures, et il suffit de remarquer que les sys-

tèmes à superposer rentrent dans les cas que nous avons examinés précédemment. Or tous ces systèmes donnant les mêmes surfaces isothermes, on aura encore ces mêmes surfaces dans le système résultant de leur superposition. D'où résulte le théorème général suivant :

« Quelle que soit la loi suivant laquelle on introduise de la chaleur en un » même point d'un cristal indéfini dans tous les sens, les surfaces isothermes » seront encore les ellipsoïdes relatifs au cas où la chaleur introduite n'est » pas renouvelée. »

Il est évident qu'il en serait de même encore *si l'on assujettissait la température du point donné à la condition, plus difficile pour le calcul, d'être constante, ou de varier suivant une loi donnée quelconque*. En effet, cette loi des températures exige une certaine loi inconnue, mais déterminée, dans l'introduction de la chaleur en ce point: or la conclusion précédente est indépendante de cette dernière loi; elle l'est donc aussi de la loi des températures assignées à ce même point.

Les surfaces isothermes étant connues, dans les divers cas que nous venons de considérer, il est facile de déterminer les courbes isothermes dans un plan quelconque; car elles ne seront autre chose que les intersections de ce plan avec la série des ellipsoïdes isothermes. Ce seront donc *des ellipses semblables, ayant pour centre commun le point de rencontre de leur plan et du diamètre conjugué à la direction de ce plan dans le système des ellipsoïdes*.

J'établis ensuite plusieurs propriétés importantes du flux de chaleur dans les mêmes cas dont il vient d'être question, l'origine étant toujours le point primitivement échauffé. Elles peuvent s'énoncer de la manière suivante:

« 1°. Le flux maximum en un point quelconque est toujours dirigé suivant le rayon vecteur de ce point.
» 2°. Dans un plan quelconque, le flux normal à ce plan est le même à chaque instant en tous les points d'une même courbe isotherme quelconque. Il est constamment nul si le plan passe par l'origine. »

Ces deux propositions subsistent de quelque manière qu'on introduise successivement de la chaleur à l'origine. Mais les deux suivantes n'ont lieu que quand la quantité de chaleur primitivement introduite n'est pas renouvelée.

« 1°. En tout point d'un plan quelconque, le rapport du flux, normal à » ce plan, à la température en ce point, est le même à un même instant » quelconque. Il est proportionnel à la distance de l'origine à ce plan, en » raison inverse du temps écoulé, et indépendant de la direction de ce plan.

» 2°. Les températures entre deux plans parallèles quelconques, conçus » dans le solide indéfini et comprenant entre eux l'origine, sont à chaque » instant les mêmes que si on réduisait le solide à la partie comprise entre » ces deux plans, et que ses deux faces fussent exposées à l'action de deux » milieux à la température constante de zéro, et tels que pour chacun d'eux » la conductibilité extérieure du solide fût égale à la distance de l'origine à » la face correspondante, multipliée par la chaleur spécifique et la densité » de la substance, et divisée par le double du temps écoulé. »

Je considère ensuite le cas où l'échauffement initial aurait lieu en tous les points d'une ligne finie ou infinie, inclinée d'une manière quelconque sur les axes du cristal.

Les surfaces isothermes ne sont plus des ellipsoïdes, et leur équation renferme une intégrale définie dont la valeur ne peut être exprimée sous forme finie. Il y a cependant une certaine direction de plans pour laquelle les courbes isothermes jouissent d'une propriété qui mérite d'être remarquée, et qui peut s'énoncer comme il suit :

« Lorsqu'un corps cristallisé indéfini a été primitivement échauffé d'une » manière arbitraire, en tous les points situés sur une même droite de lon- » gueur quelconque, les courbes isothermes dans tout plan parallèle au plan » conjugué de cette droite dans les ellipsoïdes principaux seront des ellipses » semblables à l'ellipse conjuguée de cette droite, ayant leurs axes parallèles » à ceux de cette dernière et leur centre sur cette droite même. »

Lorsque la ligne d'échauffement primitif est indéfinie, *les surfaces isothermes sont des cylindres dont les arêtes sont parallèles à cette ligne, et circonscrits aux ellipsoïdes principaux dont les centres seraient sur cette même ligne.*

Si l'on introduit de la chaleur en tous les points de la ligne indéfinie d'échauffement primitif, suivant une loi quelconque, la même pour chaque point, il résulte de la superposition des effets que *les surfaces isothermes seront encore les mêmes que lorsque la chaleur n'est pas renouvelée.*

Lorsque la ligne dont il s'agit est un des axes principaux de conductibilité du cristal, *cet axe est celui des cylindres isothermes, et leurs bases sont des ellipses dont les axes sont dirigés suivant les deux autres axes principaux du cristal, et proportionnels aux racines carrées des conductibilités principales correspondantes.*

Dans la seconde partie du Mémoire, je considère des phénomènes plus faciles à réaliser et relatifs au mouvement de la chaleur, non plus dans un solide indéfini, mais dans une plaque d'une petite épaisseur, dont les deux surfaces indéfinies sont exposées à l'action de deux milieux quelconques, à des températures données arbitrairement. Je considère d'abord le cas où la plaque a ses faces perpendiculaires à un axe principal, et j'établis cette première proposition :

« Lorsqu'une certaine quantité de chaleur a été introduite dans une partie
 » infiniment petite de la plaque, et s'y propage pendant un temps indéfini,
 » les courbes isothermes sur ses deux faces sont des ellipses dont les axes
 » ont la direction des axes principaux de conductibilité, et sont propor-
 » tionnels aux racines carrées des conductibilités principales. »

Si l'on ne se borne pas à une première introduction de chaleur, et qu'on en ajoute d'une manière continue, suivant une loi quelconque, *les courbes isothermes sont encore les mêmes.*

Cette même proposition subsistera donc encore si cette loi est telle, qu'il en résulte au point échauffé *une température constante ou variable suivant une loi donnée.*

Enfin, comme elle est indépendante du temps, *elle se vérifiera encore dans les températures limites que tendent à acquérir les divers points de la plaque, lorsque l'origine est maintenue à une température invariable.*

Il résulte de là que si par un procédé quelconque, par exemple celui qu'a suivi M. Senarmont, l'on déterminait les courbes isothermes sur les faces de deux plaques indéfinies taillées dans un cristal, perpendiculairement à deux de ses axes principaux de conductibilité, on connaîtrait les rapports des trois conductibilités principales de la substance dont il est formé.

On pourrait craindre que nos calculs, se rapportant à des plaques indéfinies dans tous les sens, ne s'appliquassent pas à des plaques limitées. Mais

cette observation ne peut s'appliquer qu'aux parties qui avoisinent le contour de la plaque. M. Senarmont a reconnu que partout ailleurs les lignes isothermes restent les mêmes, quelque forme que l'on donne à la plaque ; elles sont donc celles que l'on obtiendrait en supposant la plaque indéfinie.

Je considère ensuite le cas général où les faces de la plaque sont inclinées d'une manière quelconque sur les axes principaux. J'ai pu traiter ce cas, beaucoup moins simple que le précédent, en établissant d'abord le théorème qui suit :

« Lorsque les conductibilités extérieures des faces de la plaque sont des » fonctions quelconques du temps, les températures en chaque point ne » diffèrent que par un facteur commun, dépendant du temps, de celles que » l'on trouverait si les faces avaient des conductibilités nulles, les températures initiales étant les mêmes. »

Il résulte de ce théorème que si on connaît les courbes isothermes, lorsque les conductibilités extérieures sont représentées par certaines fonctions particulières du temps, on les connaîtra pour tout autres.

En rapprochant cette conséquence du théorème démontré précédemment sur les températures des points d'un solide indéfini, qui sont compris entre deux plans parallèles renfermant le point primitivement échauffé, on parvient à la proposition suivante :

« Les courbes isothermes sur les faces d'une plaque quelconque très-peu » épaisse sont les mêmes que l'on trouverait, si dans le solide indéfini on » concevait une plaque dans des circonstances identiques, quant à l'inclinaison de ses faces sur les axes principaux, et la position du centre de » température dans l'état initial. »

Or le problème auquel on est ainsi ramené a été précédemment résolu, et il n'y a plus qu'à en faire l'application à la question actuelle.

On en déduit cette première proposition :

« Les courbes isothermes sur chacune des faces de la plaque sont les » intersections de ces faces avec les ellipsoïdes principaux, dont le centre est » à l'origine, c'est-à-dire au centre des températures initiales. Les centres de » ces courbes sont sur le diamètre conjugué du plan parallèle aux faces, » mené par le centre. »

D'où il résulte que les deux centres des courbes isothermes sur les deux

faces ne sont situés sur une même perpendiculaire aux faces, que lorsque celles-ci sont perpendiculaires à un des axes principaux de conductibilité.

Les centres des courbes isothermes ont avec la position des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces faces, un rapport qui mérite d'être remarqué. Nous nous bornerons, pour plus de simplicité, au cas où deux des trois axes principaux de conductibilité sont égaux.

Dans ce cas, si par l'origine on mène une perpendiculaire aux faces de la plaque et une ligne dans la direction du troisième axe, le plan de ces deux lignes coupera le plan des deux axes égaux suivant un axe principal de conductibilité, et renfermera par conséquent deux axes principaux. Cela posé, sur chaque face de la plaque, *le centre des ellipses isothermes sera dans l'angle compris entre la perpendiculaire et celui de ces deux axes qui correspond à la plus grande conductibilité.*

Une des expériences de M. Senarmont est d'accord avec ce résultat, dans le cas où l'axe inégal est celui de la plus grande conductibilité. Il serait à désirer qu'il la fît dans le cas inverse où le résultat est indiqué d'avance par l'analyse.

Diffusion de la chaleur accumulée dans une portion infiniment petite en tous sens, le reste du solide indéfini étant à une même température en tous ses points.

1. L'équation générale de la propagation de la chaleur dans un milieu homogène dont la conductibilité varie avec la direction, est, en prenant les axes de coordonnées dans la direction des axes principaux de conductibilité de la substance,

$$(1) \quad \frac{dv}{dt} = A \frac{d^2v}{dx^2} + B \frac{d^2v}{dy^2} + C \frac{d^2v}{dz^2},$$

A, B, C étant les rapports des conductibilités principales au produit de la densité Δ de la substance par sa chaleur spécifique c .

Désignons par $F(x', y', z')$ la température du point dont les coordonnées sont x', y', z' dans l'état initial. Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que la partie primitivement échauffée soit extrêmement petite dans tous les sens, de sorte que les quantités x', y', z' puissent être supposées

aussi petites que l'on en aura besoin pour rendre suffisantes les approximations qui en dépendront. Tout le reste du solide indéfini a, dans ce premier instant, une même température prise pour le zéro de l'échelle.

L'intégrale générale de l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$(2) \quad v = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{8\pi^{\frac{1}{2}} \sqrt{ABC}} \iiint e^{-\frac{1}{4t} \left[\frac{(x-x')^2}{A} + \frac{(y-y')^2}{B} + \frac{(z-z')^2}{C} \right]} F(x', y', z') dx' dy' dz',$$

les intégrations s'étendant à toute la partie primitivement échauffée, quelle qu'elle soit.

Or, dans le cas actuel, cette expression peut être beaucoup simplifiée, en choisissant convenablement l'origine des coordonnées, et négligeant seulement les termes de l'ordre des carrés des dimensions de l'échauffement primitif.

En effet, l'exponentielle développée suivant les puissances de x', y', z' , au moyen de la formule de Maclaurin, devient, en supposant t différent de zéro, sans quoi il faudrait conserver la formule (2),

$$e^{-\frac{1}{4t} \left(\frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{B} + \frac{z'^2}{C} \right)} + Px' + Qy' + Rz' + Sx'^2 + \dots$$

L'intégrale triple qui entre dans le second membre de l'équation (2) sera remplacée par la série suivante :

$$e^{-\frac{1}{4t} \left(\frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{B} + \frac{z'^2}{C} \right)} \iiint F(x', y', z') dx' dy' dz' + P \iiint x' F(x', y', z') dx' dy' dz' \\ + Q \iiint y' F(x', y', z') dx' dy' dz' + R \iiint z' F(x', y', z') dx' dy' dz' \\ + S \iiint x'^2 F(x', y', z') dx' dy' dz' + \dots$$

Mais il est possible de prendre une origine des coordonnées, telle que l'on ait

$$\iiint x' F(x', y', z') dx' dy' dz' = 0, \quad \iiint y' F(x', y', z') dx' dy' dz' = 0, \\ \iiint z' F(x', y', z') dx' dy' dz' = 0.$$

Il suffit, en effet, de choisir le point qui serait le centre de gravité de la partie primitivement échauffée, si en chaque point la densité était proportionnelle à sa température initiale $F(x', y', z')$. Nous désignerons, par analogie, ce point particulier sous le nom de *centre de température*.

Prenons donc ce centre pour origine, et négligeons les termes qui renferment x'^2, y'^2, z'^2 , etc.; la série précédente se trouvera réduite à son premier terme. Faisons, de plus,

$$\iiint F(x', y', z') dx' dy' dz' = w\omega,$$

ω désignant le volume de la partie primitivement échauffée, et w sa température moyenne. La formule (2) sera remplacée par la suivante :

$$(3) \quad v = \frac{w\omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{ABC}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4t}\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}\right)},$$

et les quantités négligées sont de l'ordre du carré des dimensions de l'échauffement initial. La formule (3) serait donc rigoureusement exacte si ces dimensions étaient considérées comme nulles; elle donne une erreur du second ordre, en les supposant seulement très-petites. *Elle est la même que si la quantité totale de chaleur introduite dans l'état initial était réunie primitivement au centre de température.*

Remarque. — La réduction de l'échauffement initial à un seul point, qui vient d'être établie dans le cas d'un solide indéfini dans tous les sens, peut être effectuée aussi dans celui d'un solide fini, dont la surface est assujettie à des conditions quelconques de température. Car la chaleur se répandant de la même manière dans l'un et l'autre cas, à partir de l'état initial, les conditions de la surface, quelles qu'elles soient, devront en modifier semblablement la diffusion; et par conséquent on pourra, dans tous les cas, considérer la chaleur primitive comme concentrée en un seul point, soit qu'il s'agisse d'un corps fini ou indéfini.

2. La première conséquence que l'on tire de la formule (3), c'est que la valeur de v est la même, au même instant, en tous les points pour lesquels $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}$ a une même valeur quelconque, et qui constituent une surface ayant pour équation générale $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \lambda^2$, λ étant une constante arbitraire; ce qui donne la proposition suivante :

« A une époque quelconque, les surfaces isothermes forment une série » continue d'ellipsoïdes semblables, dont les axes sont dirigés suivant les » axes principaux de conductibilité menés par le point primitivement

» échauffé, et sont proportionnels aux racines carrées des conductibilités principales. »

Je désignerai, dans tout le cours de ce Mémoire, ces ellipsoïdes sous le nom d'*ellipsoïdes principaux*. Ces ellipsoïdes deviennent des sphères, si l'on a $A = B = C$. Dans ce cas, la conductibilité moyenne est la même dans tous les sens; c'est-à-dire que le flux dans toute direction est le même que si la conductibilité était la même en tous sens, quoique cependant il puisse en être tout autrement, et que la quantité de chaleur que s'envoient deux molécules, ne soit pas indépendante de la direction de la droite qui les joint.

La température dont sont affectés, à chaque instant, les points de l'ellipsoïde, ayant pour équation $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \lambda^2$, est, d'après l'équation (3),

$$\nu = \frac{w\omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{ABC}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}};$$

et, comme les axes de cet ellipsoïde sont proportionnels à λ , cette valeur de ν prouve qu'au même instant les températures des ellipsoïdes isothermes sont d'autant moindres que leurs dimensions sont plus grandes.

Quant à l'époque du maximum de température sur un même ellipsoïde, on la trouverait en égalant à zéro la dérivée de ν , prise par rapport à t seulement, λ étant considéré comme constante. Cette époque ne sera pas la même pour tous les ellipsoïdes isothermes, parce que λ entrera dans la valeur de t . Sa distance à l'origine du temps est proportionnelle au carré de λ , ou des axes de ces ellipsoïdes.

Cas où l'on introduit continuellement de la chaleur au même point du solide indéfini en tout sens.

3. Nous avons supposé jusqu'ici que la quantité de chaleur primitivement introduite dans une petite portion du solide ne s'y renouvelait pas; nous allons actuellement considérer le cas où l'on en verserait continuellement, suivant une loi donnée, dans cette même portion du corps.

Nous rappellerons d'abord que si, à une époque quelconque, on introduit une certaine quantité de chaleur dans une partie quelconque d'un corps

fini ou indéfini, exposé à l'action de certains milieux, ou assujetti à certaines températures fixes dans certaines portions de sa surface, la température qu'on observera à une époque quelconque, en un point quelconque du solide, résultera de la superposition de deux autres. L'une sera celle que l'on aurait observée en ce point, si l'on n'avait pas introduit une nouvelle quantité de chaleur. L'autre sera celle que l'on observerait à la même époque en ce point, si, au moment où l'on a fait cette introduction l'on considérait le même solide, ayant la température zéro en tous ses points, excepté ceux dans lesquels on a introduit de la chaleur, et auxquels on donnera la température qui en résulte, la température des milieux environnants étant maintenue à zéro, ainsi que celle des parties de la surface qui étaient assujetties à des températures fixes.

Faisons maintenant l'application de ce principe à la question actuelle.

Concevons le temps partagé en intervalles infiniment petits, et, au commencement de chacun d'eux, introduisons la quantité de chaleur qui devrait être versée pendant toute la durée de l'intervalle.

Supposons ensuite que, tout le reste du solide étant d'abord à la température zéro, une quelconque de ces quantités élémentaires s'y propage, pendant un temps égal à celui qui sépare l'époque de son introduction et l'époque que l'on a en vue; il est clair que la température que l'on observera à cette époque en un point quelconque, dans le système en question, sera la somme de celles que fourniraient en ce point tous les systèmes élémentaires dont nous venons de parler.

Or, dans chacun de ces systèmes, la température sera la même en tous les points de la surface d'un ellipsoïde dont les axes seront proportionnels aux racines carrées des conductibilités principales, et dirigés suivant les axes principaux menés par l'origine. Donc il en sera de même aussi dans le système qui résulte de la superposition des premiers. D'où se déduit cette proposition :

« Quelle que soit la loi suivant laquelle on introduise de la chaleur dans
 » une portion infiniment petite du solide, les surfaces isothermes seront les
 » mêmes que si la quantité de chaleur primitivement introduite n'était pas
 » renouvelée. »

En faisant usage d'une méthode générale que j'ai donnée autrefois, on cal-

culerait facilement la température en un point quelconque après le temps t . Si l'on représente par $\varphi(\theta)d\theta$ la quantité désignée par $\omega\omega$ dans la formule (3), et introduite après le temps θ pendant l'intervalle de temps $d\theta$, on devra calculer d'abord la température au point x, y, z , après le temps $t - \theta$, en supposant tout ce solide à zéro, excepté la partie infiniment petite située à l'origine. On trouvera pour l'expression de cette température, en faisant usage de la formule (3),

$$\frac{\varphi(\theta)d\theta}{8\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{ABC}}(t-\theta)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{4(t-\theta)}\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\right)}$$

Donc la température cherchée au point x, y, z , après le temps t , sera

$$(4) \quad v = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{ABC}} \int_0^t \varphi(\theta)d\theta \cdot (t-\theta)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4(t-\theta)}\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\right)}.$$

Le résultat de cette intégration est nécessairement une fonction de t et de $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}$; d'où il suit qu'à une époque quelconque les surfaces isothermes ont pour équation $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \text{constante}$, comme nous l'avions déjà démontré.

Cas où la température serait maintenue la même dans une portion infiniment petite du solide, ou variable suivant une loi donnée arbitraire.

4. Si l'on maintient une partie infiniment petite du solide à une température fixe, tous les autres points, partant de la température zéro, passeront par des états successifs, pour lesquels il est maintenant facile de déterminer les surfaces isothermes.

En effet, il sort à chaque instant de la partie maintenue à une température fixe, de la chaleur qui se propage dans le reste du solide; et il est nécessaire qu'elle soit exactement remplacée à mesure qu'elle s'échappe, sans quoi la température ne resterait pas la même dans cette partie. Nous rentrons donc dans le cas où l'on introduit continuellement de la chaleur dans une petite partie du solide, et comme la proposition que nous avons obtenue dans ce cas est indépendante de la loi de cette introduction, elle a lieu lorsque cette

loi est celle qui rendra constante la température de la partie que l'on considère. D'où l'on tire cette conséquence :

« Lorsque la température est maintenue la même dans une partie infiniment petite du solide, tout le reste étant d'abord à zéro, les surfaces isothermes, à une époque quelconque, seront encore des ellipsoïdes dont les axes seront dirigés suivant les axes principaux de conductibilité menés par l'origine, et proportionnels aux racines carrées des conductibilités principales.

» La même conséquence aura lieu évidemment si l'on introduit la chaleur de telle sorte qu'il en résulte une loi donnée arbitraire pour la température dans le voisinage de l'origine. »

Des courbes isothermes dans un plan quelconque.

5. La suite continue des points ayant une même température, devant se trouver sur une même surface isotherme, il s'ensuit que les courbes isothermes situées dans un plan donné ne seront autre chose que les intersections de ce plan avec la série des ellipsoïdes isothermes, ayant leurs centres au centre de température dans l'état initial. Ces courbes seront donc des ellipses semblables, ayant pour centre commun le point de rencontre de leur plan et du diamètre conjugué à la direction de ce plan, dans le système des ellipsoïdes.

Comme leurs axes passent par toutes les valeurs, depuis zéro jusqu'à l'infini, il est facile de voir que si, de l'origine on abaisse une perpendiculaire sur le plan, son pied sera sur une de ces ellipses, et, par conséquent, intérieur à toutes les ellipses plus grandes que celle-ci, et extérieur à toutes celles qui sont plus petites.

Diverses propriétés du flux de chaleur.

6. Le flux de chaleur, rapporté à l'unité de temps et à l'unité de surface, a généralement pour expression

$$P = - \left(A \frac{dv}{dx} \cos \alpha + B \frac{dv}{dy} \cos \epsilon + C \frac{dv}{dz} \cos \gamma \right) c \Delta,$$

les axes principaux de conductibilité étant pris pour axes des x, y, z , et α, ϵ, γ

désignant les angles formés avec les axes par la direction du flux, ou de la normale au plan à travers lequel on considère l'écoulement de la chaleur.

Dans le cas que nous considérons, la valeur de v est

$$v = \frac{\omega \sqrt{t}^{-\frac{1}{2}}}{8\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{ABC}} e^{-\frac{1}{4t} \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \right)};$$

d'où résulte, en supposant toujours t différent de zéro, et négligeant les carrés des dimensions de l'échauffement primitif,

$$(5) \quad P = \frac{c \Delta \omega \sqrt{t}^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{1}{4t} \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \right)}}{16\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{ABC}} (x \cos \alpha + y \cos \epsilon + z \cos \gamma).$$

Si maintenant en un même point quelconque on donne à l'axe du flux toutes les directions possibles, le facteur $x \cos \alpha + y \cos \epsilon + z \cos \gamma$ variera seul, et son maximum, qui donnera celui de P , correspondra à la direction déterminée par les équations suivantes :

$$\frac{\cos \alpha}{x} = \frac{\cos \epsilon}{y} = \frac{\cos \gamma}{z}.$$

Cette direction est précisément celle du rayon vecteur mené de l'origine au point considéré. Et comme elle est indépendante de la température primitive de l'origine, elle sera la même pour tous les systèmes partiels des températures du solide, correspondants à des quantités de chaleur qu'on introduirait successivement à l'origine, suivant une loi quelconque. Elle sera donc encore la même pour le système des températures résultant de la superposition des premiers.

On peut donc, relativement à ce système général, énoncer la proposition suivante :

« Le flux maximum en un point quelconque est toujours dirigé suivant » le rayon vecteur partant du point primitivement échauffé. »

Ce qui entraîne cette conséquence :

« Le flux en un point quelconque est nul suivant toute direction perpendiculaire au rayon vecteur. »

Considérons maintenant tous les points pour lesquels le terme

$x \cos \alpha + y \cos \epsilon + z \cos \gamma$ est constant; ce seront ceux d'un plan perpendiculaire à la direction déterminée par les angles α, ϵ, γ . Si, parmi ces points, nous prenons ceux pour lesquels $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}$ est constant, la valeur de P , donnée par la formule (5), restera évidemment constante pour une même valeur de t ; d'où résulte la propriété suivante, qui s'applique au même système général que les précédentes :

« Dans un plan quelconque, le flux normal à ce plan est le même à chaque instant en tous les points d'une même courbe isotherme quelconque. Ce flux est constamment nul si le plan passe par l'origine. »

Si l'on divise le flux par la température, on trouve

$$\frac{P}{v} = \frac{c \Delta (x \cos \alpha + y \cos \epsilon + z \cos \gamma)}{2t}.$$

Ce rapport sera donc le même, au même instant, pour tous les points qui satisferont à la condition

$$x \cos \alpha + y \cos \epsilon + z \cos \gamma = p,$$

p désignant une constante arbitraire. Or ces points sont ceux d'un plan perpendiculaire à l'axe du flux, et dont la distance à l'origine est p ; on peut donc énoncer le théorème suivant :

« En tout point d'un plan quelconque, le rapport du flux normal à ce plan, à la température en ce point, est le même à un même instant quelconque. Il est proportionnel à la distance de l'origine à ce plan, en raison inverse du temps écoulé, et indépendant de la direction de ce plan. »

Mais cette proposition ne serait pas vraie pour le système résultant de la superposition de plusieurs autres correspondants à des quantités de chaleur introduites à l'origine à des époques différentes; cela tient à ce que le diviseur t varierait de l'un à l'autre.

Il est bon de remarquer que la quantité p est positive lorsque α, ϵ, γ sont les angles formés avec les axes par la direction de la perpendiculaire, en allant de l'origine vers le plan, et que p est négatif si la direction est contraire. En convenant donc de considérer le flux dans la même direction que la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan, p sera une quantité

positive, et la formule

$$\frac{P}{v} = \frac{c \Delta p}{2t}$$

montre que ce flux sera positif si v l'est lui-même, ce qui aura lieu si la température initiale de l'origine est supérieure à zéro. Au contraire, le flux sera négatif, ou dirigé de l'autre côté du plan, si la température initiale est au-dessous de zéro.

Remarque sur le mouvement de la chaleur dans la partie du solide comprise entre deux plans parallèles indéfinis.

7. Supposons qu'on ait introduit à l'origine une certaine quantité de chaleur qui ne soit pas renouvelée, en considérant le solide indéfini traversé par un plan de direction quelconque, à une distance p de l'origine.

Le rapport du flux à la température en chaque point de ce plan étant égal à $\frac{c \Delta p}{2t}$, et dirigé du côté du plan qui est opposé à l'origine en supposant v positif, ce qui aura lieu si la température moyenne initiale w est positive, il s'ensuit que l'action de la partie du solide qui est au delà de ce plan, pourrait être remplacée à chaque instant par celle d'un fluide à la température zéro, et tel que la conductibilité extérieure serait égale à $\frac{c \Delta p}{2t}$.

Si maintenant nous concevons de l'autre côté de l'origine et à une distance p , un plan parallèle au premier, on pourrait semblablement supprimer la partie indéfinie du solide, située au delà de ce plan, pourvu qu'on la remplace par un milieu à zéro, tel que la conductibilité extérieure fût $\frac{c \Delta p_1}{2t}$.

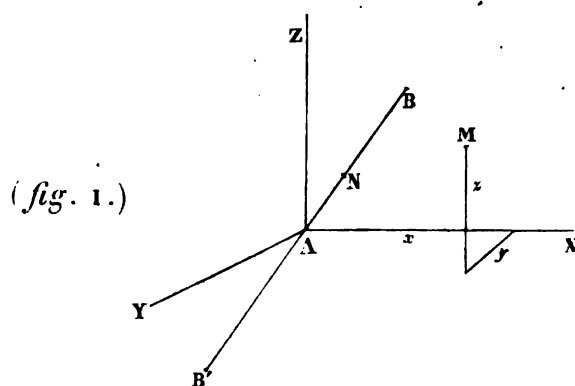
Ainsi les températures entre deux plans parallèles quelconques, conçus dans le solide indéfini et comprenant entre eux l'origine, sont à chaque instant les mêmes que si on réduisait le solide à la partie comprise entre ces deux plans, et que ses deux faces fussent exposées à l'action de deux milieux à la température constante de zéro, et tels que pour chacun d'eux la conductibilité extérieure du solide fût égale à la distance de l'origine à la face correspondante, multipliée par la chaleur spécifique et la densité de la substance, et divisée par le double du temps écoulé.

Ce théorème nous sera très-utile par la suite. On voit qu'il n'est pas d'une

application immédiate, ni facile à réaliser, puisqu'il suppose des conductibilités variables avec le temps.

Diffusion de la chaleur dans un cristal indéfini, dont l'échauffement primitif a lieu suivant une droite, finie ou infinie, dans une direction quelconque.

8. Soient (fig. 1) $BB' = 2l$ la ligne primitivement échauffée; $AX, AY,$



AZ les axes principaux de conductibilité menés par le milieu A de BB' ; α, β, γ les angles que cette ligne fait avec les axes. Considérons en un point quelconque N de BB' , un élément du de cette ligne. Soient ω la section droite de l'échauffement initial, v la température moyenne de cette section, v la température au point M , ayant pour coordonnées x, y, z ; u la coordonnée AN , comptée dans la direction AB .

L'élément ωdu de l'échauffement initial donnera en M après le temps t , d'après la formule (4), une température v' , représentée par l'expression suivante :

$$v' = \frac{\omega v du}{8 \pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{ABC}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4t} \left[\frac{(x-u \cos \alpha)^2}{A} + \frac{(y-u \cos \beta)^2}{B} + \frac{(z-u \cos \gamma)^2}{C} \right]},$$

ou, en posant $\frac{\cos^2 \alpha}{A} + \frac{\cos^2 \beta}{B} + \frac{\cos^2 \gamma}{C} = m^2$, $\frac{x \cos \alpha}{A} + \frac{y \cos \beta}{B} + \frac{z \cos \gamma}{C} = n$,
 $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = p$,

$$v' = \frac{\omega v du}{8 \pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{ABC}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4t} (m^2 u^2 - 2 n u + p)}.$$

Pour avoir la température du point M, il faut faire la somme des valeurs de v' , relatives à tous les éléments de BB', en considérant v comme pouvant varier avec u ; on trouvera ainsi

$$(6) \quad v = \frac{\omega t^{-\frac{3}{2}}}{8\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{ABC}} \int_{-l}^l v du e^{-\frac{1}{4t}(m^2 u^2 - 2nu + p)},$$

expression que l'on aurait pu déduire directement de la formule générale (2).

Remplaçant

$$m^2 u^2 - 2nu + p \quad \text{par} \quad m^2 \left(u - \frac{n}{m^2}\right)^2 + p - \frac{n^2}{m^2},$$

il vient

$$v = \frac{\omega t^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{n^2 - pm^2}{4tm^2}}}{8\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{ABC}} \int_{-l}^l v du e^{-\frac{m^2}{4t}\left(u - \frac{n}{m^2}\right)^2}.$$

Soit $v = \varphi(u)$, et posons $u - \frac{n}{m^2} = \zeta$; la valeur de v deviendra

$$(7) \quad v = \frac{\omega t^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{n^2 - pm^2}{4tm^2}}}{8\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{ABC}} \int_{-l - \frac{n}{m^2}}^{l - \frac{n}{m^2}} \varphi\left(\zeta + \frac{n}{m^2}\right) e^{-\frac{m^2 \zeta^2}{4t}} d\zeta.$$

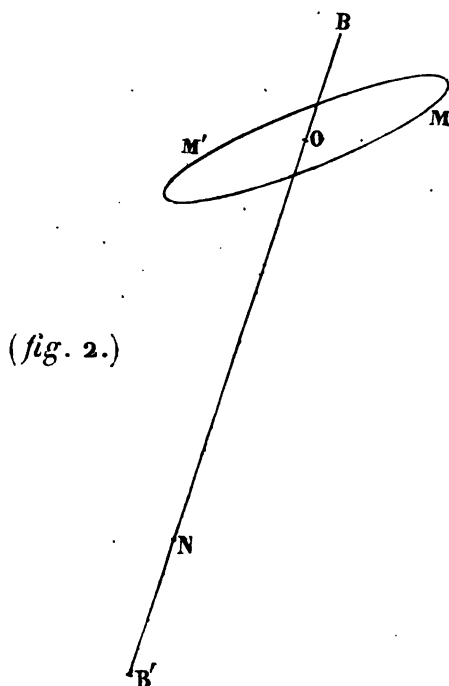
Si l'on pose $\int_{-l - \frac{n}{m^2}}^{l - \frac{n}{m^2}} \varphi\left(\zeta + \frac{n}{m^2}\right) e^{-\frac{m^2 \zeta^2}{4t}} d\zeta = \psi(n)$, les surfaces iso-

thermes auront pour équation générale

$$(8) \quad e^{\frac{n^2 - pm^2}{4tm^2}} \psi(n) = \text{constante}.$$

Propriété particulière des surfaces isothermes.

9. Supposons le cas le plus général où l'échauffement linéaire initial a une étendue finie BB' (*fig. 2*), et varie arbitrairement dans cette étendue.



Les températures du solide à chaque instant sont alors représentées par la formule (7).

Soit M un point quelconque du solide; menons par ce point un plan parallèle au plan diamétral conjugué de la direction BB' dans les ellipsoïdes principaux; et considérons celui de ces ellipsoïdes qui a son centre en un point quelconque N de BB' et passe par M. Il sera à chaque instant une surface isotherme, quant à la diffusion de la chaleur initiale qui existait dans l'élément infiniment petit situé en N. Donc, en ne tenant compte que de cette portion de la chaleur initiale, on trouvera à chaque instant une même température en tous les points de la section MM' de cet ellipsoïde par le plan mené par M. Cette section étant conjuguée du diamètre BB' a son centre sur cette ligne, et sera la même, quelque part que soit situé le point N sur la direction BB'; car tous les ellipsoïdes, analogues à celui que nous avons considéré, seront semblables et auront leurs axes parallèles: d'où il suit que leurs intersections avec le plan mené par M seront toutes semblables, et auront leurs lignes homologues parallèles. De plus, la direction BB' étant celle du diamètre conjugué de ce plan pour tous les ellipsoïdes, le centre de toutes

les sections se trouvera au point O où BB' perce leur plan ; d'où il suit enfin que toutes celles de ces courbes d'intersection qui passeront par un même point M se confondront.

Or, puisque après un temps quelconque, un élément quelconque de BB' détermine une égale température en tous les points de la courbe MM', et que d'ailleurs il faut, pour avoir la température effective d'un point du solide, faire la somme de toutes celles qui résulteraient des divers éléments de l'échauffement primitif, il s'ensuit que tous les points de la courbe MM' auront une même température à une époque quelconque ; ce qui donne le théorème suivant :

« Lorsqu'un corps cristallisé indéfini a été primitivement échauffé d'une
» manière arbitraire en tous les points situés sur une même droite, de longueur quelconque, les courbes isothermes dans un plan quelconque parallèle au plan conjugué de cette droite dans les ellipsoïdes principaux seront
» des ellipses semblables à l'ellipse conjuguée de cette droite, ayant leurs
» axes parallèles à ceux de cette dernière, et leurs centres sur cette droite
» même. »

Ainsi, quelle que soit la longueur de la droite primitivement échauffée, et la loi de ses températures, les surfaces isothermes jouiront de la propriété d'être coupées suivant des ellipses semblables par un certain système de plans parallèles.

Cette propriété remarquable peut encore être démontrée simplement par l'analyse au moyen de la formule (7).

En effet, la valeur de v ou de la température du point dont les coordonnées sont x, y, z , restera la même pour toutes les valeurs de x, y, z qui rendront n et p constants. Soient ϵ, ϵ' deux constantes quelconques ; la température sera donc la même en tous les points qui satisferont aux deux équations

$$\frac{x \cos \alpha}{A} + \frac{y \cos \beta}{B} + \frac{z \cos \gamma}{C} = \epsilon,$$

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \epsilon'.$$

La seconde représente tous les ellipsoïdes principaux relatifs à l'origine ; la première, tous les plans parallèles au plan diamétral conjugué du diamètre

de ces ellipsoïdes, qui fait avec les axes les angles α , β , γ , et dont la direction se confond par conséquent avec BB' .

On retombe donc ainsi sur la proposition déjà démontrée.

Cas où la ligne d'échauffement primitif est indéfinie dans les deux sens, et à la même température en tous ses points.

10. Dans ce cas, l'intégrale définie qui entre dans la formule (7) se réduit à

$$\nu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m^2 \zeta^2}{4t}} d\zeta, \quad \text{ou} \quad \frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}}{m};$$

ce qui donne

$$(9) \quad \nu = \frac{\omega \nu t^{-1}}{4m\pi\sqrt{ABC}} e^{\frac{n^2 - pm^2}{4tm^2}}.$$

L'équation générale des surfaces isothermes sera

$$n^2 - pm^2 = C_1,$$

C_1 désignant une constante arbitraire; ces surfaces sont des cylindres elliptiques.

Mais au lieu de les discuter d'après leur équation, il sera plus simple de faire usage de la propriété précédemment démontrée.

D'abord il est évident que tous les points d'une même parallèle à BB' , étant dans les mêmes circonstances relativement à l'échauffement initial, auront à chaque instant la même température; ainsi les surfaces isothermes seront des cylindres parallèles à BB' . De plus, on sait que les courbes isothermes sur les plans parallèles au plan conjugué de BB' sont les sections faites par ces plans dans tous les ellipsoïdes isothermes ayant leurs centres à l'origine, c'est-à-dire en un point quelconque BB' .

Donc les surfaces isothermes sont les cylindres parallèles à BB' et passant par ces courbes, ou encore les cylindres parallèles à BB' et circonscrits à tous les ellipsoïdes isothermes ayant leurs centres sur BB' .

On reconnaîtrait facilement que l'équation générale de ces cylindres est précisément

$$n^2 - pm^2 = C_1.$$

Connaissant les surfaces isothermes, on aura facilement les courbes d'égale température sur des plans quelconques. Ce seront les ellipses semblables suivant lesquelles ces plans couperont la série des cylindres isothermes.

Si la ligne indéfinie suivant laquelle a lieu l'échauffement primitif se confondait avec un des axes principaux, par exemple celui des z , la formule (9) se simplifierait. On aurait alors

$$m^2 = \frac{1}{C}, \quad n = \frac{z}{C},$$

et, par suite,

$$v = \frac{\omega \sqrt{t}^{-1}}{4\pi\sqrt{AB}} e^{-\frac{1}{4t}\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B}\right)}.$$

On parviendrait directement à ce même résultat en partant de la formule (2) et y supposant la fonction indépendante de z' .

Si maintenant on suppose que l'on introduise d'une manière continue de la chaleur dans l'étendue indéfinie de la ligne BB' , suivant une loi arbitraire, mais la même en chaque point, des raisonnements semblables à ceux que nous avons faits dans le cas d'un centre unique d'échauffement conduiraient à la proposition suivante :

« Lorsque dans un cristal indéfini en tous sens et à la température zéro,
 » l'on introduit de la chaleur en tous les points d'une droite quelconque
 » indéfinie suivant une même loi arbitraire, ou lorsque l'on assujettit la
 » température de tous les points de cette droite à une même valeur, con-
 » stante ou variable suivant une loi quelconque, les surfaces isothermes
 » forment à chaque instant une série continue de surfaces cylindriques,
 » circonscrites aux ellipsoïdes principaux ayant leurs centres sur cette
 » droite.

» Dans ce cas, la ligne d'échauffement serait un axe principal de conduc-
 » tibilité du cristal; cet axe serait celui des cylindres isothermes, et leurs
 » bases seraient des ellipses dont les axes seraient dirigés suivant les deux
 » autres axes du cristal, et proportionnels aux racines carrées des conduc-
 » tibilités principales correspondantes. »

DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UNE PLAQUE D'UNE TRÈS-PETITE ÉPAISSEUR,
INCLINÉE D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE SUR LES AXES PRINCIPAUX.

*Propagation de la chaleur dans une plaque d'une très-petite épaisseur
dont les faces sont perpendiculaires à l'un des axes principaux.*

11. Supposons maintenant, au lieu d'un solide indéfini dans tous les sens, une plaque indéfinie d'une très-petite épaisseur; et considérons d'abord le cas le plus simple, celui où elle est perpendiculaire à l'un des trois axes principaux de la substance. Sa surface est en contact des deux côtés avec des milieux quelconques, à des températures constantes ζ , ζ' ; et les conductibilités extérieures relatives à ces milieux ont des valeurs différentes quelconques H , H' . La plaque a été exposée à l'action seule de ces milieux pendant un temps assez considérable pour être parvenue à un état invariable.

Si nous supposons l'épaisseur ε de la plaque assez petite pour que la température soit sensiblement la même en tous les points d'une même perpendiculaire à ses faces, cette température invariable aura pour valeur

$$\frac{H\zeta + H'\zeta'}{H + H'}.$$

Nous compterons, pour plus de commodité, les températures v à partir de cette valeur particulière, qui se trouvera prise pour le zéro de l'échelle. Nous prendrons pour axe des z la perpendiculaire aux faces, qui passe par le point primitivement échauffé; et pour axes des x et y , les directions des deux autres axes principaux de conductibilité de la substance.

Désignons par h la demi-somme de H et H' divisée par le produit de la densité de la substance par sa chaleur spécifique; l'équation différentielle à laquelle on parviendra facilement est la suivante :

$$(10) \quad \frac{dv}{dt} = A \frac{d^2v}{dx^2} + B \frac{d^2v}{dy^2} - \frac{2h}{\varepsilon} v.$$

Pour l'intégrer, nous poserons d'abord

$$v = e^{-\frac{2h}{\varepsilon} t} u,$$

ce qui donnera

$$\frac{du}{dt} = A \frac{d^2 u}{dx^2} + B \frac{d^2 u}{dy^2}.$$

En raisonnant comme précédemment, on trouverait

$$u = \frac{N t^{-1}}{4 \pi \sqrt{AB}} \cdot e^{-\frac{1}{4t} \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} \right)},$$

N étant le produit de la température initiale moyenne par la section de l'échauffement primitif avec une des faces de la plaque; il en résultera

$$(11) \quad v = \frac{N e^{-\frac{2h}{t}}}{4 \pi t \sqrt{AB}} e^{-\frac{1}{4t} \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} \right)}.$$

On reconnaît immédiatement, d'après cette formule, que « quelles que soient »
 » les conductibilités extérieures, les courbes isothermes sont des ellipses
 » dont les axes ont la direction des axes principaux de conductibilité, et
 » sont proportionnels aux racines carrées des conductibilités principales. »

Il faut remarquer, toutefois, que quoique ces courbes soient les mêmes que les intersections du plan principal et des ellipsoïdes principaux, les températures ne sont pas pour cela les mêmes en chaque point de la plaque qu'elles seraient aux mêmes points si la chaleur se propageait dans les trois dimensions. La valeur absolue des températures dépend, dans ce dernier cas, des trois conductibilités principales; tandis que, dans le cas de la plaque, elle ne dépend que de la conductibilité extérieure et des deux conductibilités relatives aux axes situés dans son plan. Mais les rapports des températures sont les mêmes dans les deux cas.

Cas où l'on introduirait continuellement de la chaleur dans un même point d'une plaque indéfinie.

12. Considérons maintenant une plaque indéfinie, et supposons de même que dans une portion infiniment petite on introduise continuellement de la chaleur, suivant une loi quelconque. Il faudra, pour avoir la température en un point quelconque à une époque quelconque, faire la somme des températures que l'on observerait en ce point dans une infinité de systèmes partiels. Ces divers systèmes se rapporteront effectivement aux quantités de

chaleur introduites pendant les intervalles infiniment petits dans lesquels on décomposera le temps t , qui se propageront depuis le moment de leur introduction jusqu'à l'époque déterminée par t , dans la plaque, partant de la température zéro et exposée à l'action du milieu à zéro. Or, dans tous ces systèmes, les surfaces isothermes sont les mêmes, comme nous l'avons vu. Elles seront donc encore les mêmes dans l'état résultant de leur superposition. D'où se tire cette conséquence :

« Quelle que soit la loi suivant laquelle on introduise de la chaleur dans
 » une portion infiniment petite d'une plaque taillée perpendiculairement à
 » l'un des axes principaux, et exposée à l'action de milieux quelconques, les
 » courbes isothermes seront à chaque instant des ellipses semblables ayant
 » leurs axes dirigés suivant les axes principaux de conductibilité, et propor-
 » tionnels aux racines carrées des conductibilités principales. »

Cette conséquence étant indépendante de la loi suivant laquelle on introduit la chaleur dans le voisinage de l'origine, on peut supposer que cette loi soit telle qu'il en résulte une température donnée arbitraire à l'origine, et, par conséquent :

« Les courbes isothermes sont encore les mêmes lorsque les points infi-
 » niment voisins de l'origine sont maintenus à une température constante,
 » ou même à une température représentée par une fonction quelconque du
 » temps. »

Il résulte de là un moyen très-simple de déterminer les rapports des trois conductibilités principales d'une substance constituée comme celles que nous considérons ici. On taillera une plaque mince perpendiculaire à l'un des trois axes principaux, et l'on échauffera d'une manière quelconque un de ses points, après avoir recouvert d'un enduit fusible ses deux faces, ou l'une des deux seulement. C'est le procédé suivi par M. Senarmont pour déterminer la forme des lignes isothermes. La ligne de séparation de la partie fondue et de la partie encore solide de cet enduit sera à chaque instant une courbe isotherme, et le carré du rapport de ses axes sera le rapport des deux conductibilités principales correspondantes; car, comme l'expérience le lui a démontré, ces courbes sont indépendantes de la manière dont la plaque est terminée, excepté pour les points voisins de son contour: elles sont donc celles que l'on observerait sur une plaque indéfinie.

On taillera ensuite une seconde plaque perpendiculaire à un autre axe principal, et on connaîtra semblablement le rapport de la troisième conductibilité à l'une des deux premières. Connaissant ainsi les rapports des trois conductibilités principales, on en obtiendra une vérification en opérant de la même manière sur une nouvelle plaque perpendiculaire au troisième axe principal.

Propagation de la chaleur dans une plaque inclinée d'une manière quelconque sur les axes principaux.

13. Nous allons considérer maintenant le cas le plus général, celui où les faces de la plaque seraient inclinées d'une manière quelconque sur les trois axes principaux.

Nous choisirons pour axe des z une perpendiculaire à ces faces. Alors l'expression des flux X , Y parallèles aux axes des x et y ne sera plus aussi simple que dans le cas précédent, où ces directions coïncidaient avec celles des axes principaux de conductibilité. On aura pour X et Y des expressions de la forme

$$X = - \left(A' \frac{dv}{dx} + D' \frac{dv}{dy} + E' \frac{dv}{dz} \right),$$

$$Y = - \left(D' \frac{dv}{dx} + B' \frac{dv}{dy} + F' \frac{dv}{dz} \right).$$

Considérons maintenant un parallélépipède rectangle ayant pour hauteur l'épaisseur très-petite ϵ de la plaque, et ses bases situées sur les faces de la plaque et ayant pour côtés deux longueurs extrêmement petites α , ϵ . Soient H_1 , H_2 les conductibilités extérieures de la substance relativement aux milieux en contact avec ses faces. Les quantités de chaleur qui dans le temps dt sortent du parallélépipède par les deux faces en contact avec les milieux à zéro, seront

$$\alpha \epsilon H_1 v dt \quad \text{et} \quad \alpha \epsilon H_2 v dt;$$

car la température ne peut varier que d'une quantité insensible, d'une face à l'autre; ce qui n'empêche pas que les dérivées par rapport à z , aient des valeurs finies. En retranchant ces deux quantités de la quantité de chaleur accumulée par le passage à travers les quatre autres faces du parallélépipède,

on aura l'accroissement qu'a subi dans le temps dt la quantité de chaleur renfermée dans ce volume. En la divisant par $\alpha \epsilon dt$, et par le produit de la chaleur spécifique c par la densité Δ de la substance, le résultat sera égal à $\frac{dv}{dt}$, et posant, pour abréger,

$$\frac{A'}{c\Delta} = A, \quad \frac{B'}{c\Delta} = B, \quad \frac{D'}{c\Delta} = D, \quad \frac{E'}{c\Delta} = E, \quad \frac{F'}{c\Delta} = F, \quad \frac{H_1 + H_2}{c\Delta} = 2h,$$

on obtiendra l'équation suivante:

$$(12) \quad \frac{dv}{dt} = A \frac{d^2 v}{dx^2} + B \frac{d^2 v}{dy^2} + 2D \frac{d^2 v}{dx dy} + E \frac{d^2 v}{dx dz} + F \frac{d^2 v}{dy dz} - \frac{2h}{\epsilon} v.$$

Il s'agit de déterminer une fonction de x, y, z, t qui satisfasse à cette équation, et qui pour $t = 0$ se réduise à une fonction donnée de x, y, z pour tous les points appartenant à la plaque. La question est, comme on le voit, beaucoup plus difficile que la précédente.

Nous allons voir comment il est possible de la ramener au cas de la diffusion de la chaleur dans un solide indéfini, quant à l'objet principal que nous nous proposons ici, qui est la détermination des lignes isothermes.

Comment le cas général de la plaque se ramène à celui du solide indéfini.

14. Supposons que les conductibilités H_1, H_2 varient avec le temps d'une manière arbitraire, et que par conséquent $\frac{2h}{\epsilon}$ soit une fonction quelconque du temps, $\phi(t)$. L'équation (12) sera changée en celle-ci,

$$(13) \quad \frac{dv}{dt} = A \frac{d^2 v}{dx^2} + B \frac{d^2 v}{dy^2} + 2D \frac{d^2 v}{dx dy} + E \frac{d^2 v}{dx dz} + F \frac{d^2 v}{dy dz} - v \phi(t).$$

Posons

$$v = ue^{-\int_{t_0}^t \phi(t) dt},$$

t_0 étant la valeur de t pour laquelle on donne les températures de tous les points de la plaque. La valeur de u sera la même que celle de v pour $t = t_0$; elle est donc connue; nous la représenterons par $F(x, y, z)$.

La substitution de la valeur précédente de v dans l'équation (13) conduit

à la suivante :

$$(14) \quad \frac{du}{dt} = A \frac{d^2 u}{dx^2} + B \frac{d^2 u}{dy^2} + 2D \frac{d^2 u}{dx dy} + E \frac{d^2 u}{dx dz} + F \frac{d^2 u}{dy dz}.$$

Or cette équation est celle que l'on trouverait si les faces de la plaque avaient une conductibilité extérieure nulle, et que u désignât la température. D'où résulte la proposition suivante :

« Lorsque les conductibilités extérieures des faces de la plaque sont des
» fonctions quelconques du temps, les températures en chaque point ne
» diffèrent que par un facteur commun, dépendant du temps, de celles que
» l'on trouverait si les faces avaient des conductibilités nulles, et que les
» températures initiales fussent les mêmes. »

Il suit de là que les courbes isothermes sur les deux faces sont les mêmes dans l'un et l'autre cas, et que, par conséquent, *si on les connaît en prenant pour les conductibilités extérieures certaines fonctions particulières du temps, on les connaîtra pour toutes les autres.*

Cela posé, considérons une plaque dont les points, situés dans une très-petite partie, ont été élevés d'abord à une certaine température, tous les autres étant à la température zéro. Soient p et p_1 les distances du centre de température à chacune des deux faces. Concevons ensuite, dans le solide indéfini, deux plans parallèles à une distance $p + p_1$, l'un de l'autre, et inclinés sur les axes principaux comme le sont les faces de la plaque ; prenons entre ces deux plans un point qui en soit distant respectivement des quantités p, p_1 ; introduisons-y la même quantité de chaleur qu'au point correspondant de la plaque, tous les autres points du solide indéfini étant à zéro. Les températures des points du solide situés entre ces deux plans seront les mêmes que si on enlevait tout le reste du solide, et que les deux faces de la plaque restante fussent exposées à l'action de milieux, par rapport auxquels les conductibilités extérieures seraient respectivement $\frac{c \Delta p}{2t}$ et $\frac{c \Delta p_1}{2t}$.

Or nous avons démontré que les rapports des températures des divers points d'une plaque, à une époque quelconque, étaient indépendants des fonctions du temps qui expriment les conductibilités extérieures. Donc ces rapports seront les mêmes que pour les points correspondants de la plaque proposée : d'où se déduit déjà cette conséquence, que les surfaces ou courbes

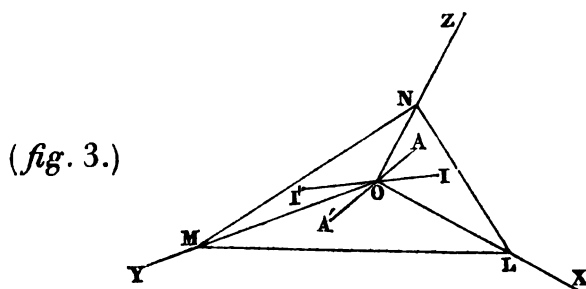
isothermes sont les mêmes dans les deux plaques. On peut donc énoncer cette proposition :

« Les courbes isothermes sur les faces d'une plaque très-peu épaisse, dont une portion très-petite a été primitivement élevée au-dessus de la température des deux milieux extérieurs, sont les mêmes que l'on trouverait si dans le solide indéfini on concevait une plaque dans des circonstances identiques quant à l'inclinaison de ses faces sur les axes principaux, et la position du centre de température dans l'état initial. »

Or le problème auquel on est ainsi ramené a été résolu précédemment, et il ne nous reste qu'à en faire l'application à la question actuelle.

Forme et position des courbes isothermes sur les faces d'une plaque quelconque, dans laquelle on introduit de la chaleur au même point suivant une loi arbitraire.

15. Soit O (fig. 3) le centre de température dans l'état primitif de la



plaque, dont une très-petite partie est à une température différente de celle du milieu environnant, qui est prise pour le zéro de l'échelle ; et supposons d'abord qu'on n'y introduise pas de nouvelles quantités de chaleur. Menons par le point O une perpendiculaire aux deux faces, et soient A et A' les points où elle les perce. Soient OX, OY, OZ les directions des axes principaux de conductibilité de la substance, qui perceront par exemple en LMN la face supérieure de la plaque. Les surfaces isothermes dans le solide indéfini seraient les ellipsoïdes principaux. Ces ellipsoïdes couperaient les plans des deux faces suivant des courbes d'égale température ; et comme les rapports des températures sont les mêmes dans la plaque donnée, qu'elles y seraient si on prolongeait indéfiniment le solide des deux côtés, il s'ensuit

que, dans cette plaque, les courbes d'égale température sur ses deux faces sont aussi les intersections des plans de ces faces par les ellipsoïdes principaux.

Or, quand un système d'ellipsoïdes dont le centre et la direction des axes coïncident est coupé par un plan, le centre commun des ellipses d'intersection est sur le diamètre conjugué du plan parallèle au premier, mené par le centre des ellipsoïdes. Donc, *si nous concevons par le centre O des ellipsoïdes un plan parallèle à LMN, et que le diamètre conjugué de ce plan perce en I le plan LMN, le point I sera le centre des ellipses isothermes, sur la face LMN. Ce diamètre, prolongé jusqu'à la seconde face de la plaque, y déterminera le centre I' des ellipses isothermes sur cette seconde face.*

La direction et le rapport des axes de ces ellipses dépendent des inclinaisons des faces de la plaque sur les axes principaux de conductibilité, mais non du temps ni de la température initiale; ces courbes resteraient donc les mêmes si l'on introduisait successivement de la chaleur à l'origine, suivant une loi arbitraire.

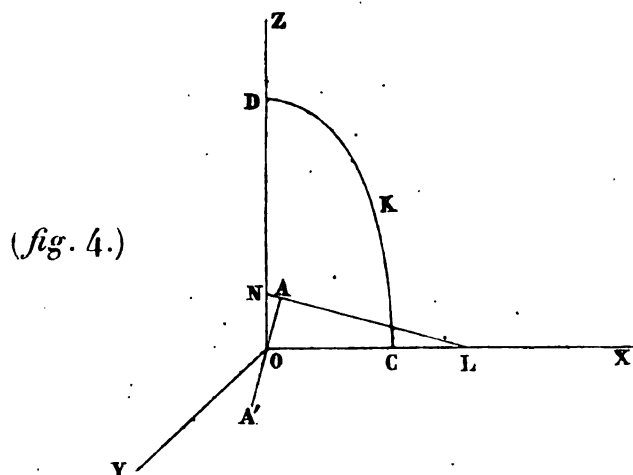
La théorie connue des surfaces du second degré nous apprend d'abord que les points I, I' ne peuvent se confondre avec A, A' que lorsque AA' est dans la direction d'un des axes des ellipsoïdes. D'où se tire cette conséquence, applicable au cas général précédemment indiqué :

« Les deux centres des ellipses isothermes sur les deux faces de la plaque »
 » ne peuvent être sur une même perpendiculaire à ces faces que lorsque »
 » ces faces sont perpendiculaires à un axe principal de conductibilité. »

La position des centres I, I' est complètement déterminée par la condition de se trouver sur le diamètre conjugué de la direction des faces de la plaque, mené par le centre des températures initiales. Les rapports de position qu'ils peuvent avoir avec les points A et A' sont donc aussi entièrement déterminés, et nous abandonnons au lecteur toutes les discussions de détail auxquelles ils peuvent donner lieu. Nous nous bornerons à quelques remarques sur le cas simple où deux axes de conductibilité seraient égaux, par exemple ceux que nous avons désignés par OX, OY. Les ellipsoïdes isothermes seront alors de révolution autour de l'axe OZ; les deux autres axes peuvent avoir une infinité de positions dans le plan perpendiculaire; et pour plus de simplicité, nous choisirons celle qui place la perpendiculaire

AA' dans le plan ZX. Les plans des faces seront parallèles à OY; le point M sera à l'infini, et le plan de la face supérieure sera déterminé par sa face LN.

Soit CKD (*fig. 4*) l'ellipse d'intersection du plan ZX avec un des ellip-



soïdes isothermes, et qui engendrerait cet ellipsoïde, en tournant autour de OZ. On aura le diamètre conjugué à la direction des faces, en cherchant le diamètre conjugué de la direction NL dans l'ellipse CKD; et son point de rencontre avec NL donnera le centre I des ellipses isothermes. Or il est facile de déterminer d'abord de quel côté il se trouvera du point A; il y a pour cela deux cas à distinguer :

1°. Soit $OC < OD$. Désignons par α l'angle NLO, et par α' celui que fait le diamètre conjugué avec l'axe des x positifs; on aura, d'après la théorie de l'ellipse,

$$\tan \alpha \tan \alpha' = \frac{OD^2}{OC^2} > 1.$$

Or

$$\tan \alpha \tan AOL = 1;$$

donc

$$\tan \alpha' > \tan AOL, \quad \text{et, par suite,} \quad \alpha' > AOL.$$

Donc le point I est entre A et N.

2°. Soit maintenant $OC > OD$; il en résultera

$$\tan \alpha' < \tan AOL, \quad \alpha' < AOL,$$

et le point I sera entre L et A.

Ces deux résultats peuvent être renfermés dans un énoncé très-simple : Si du centre d'échauffement initial, on mène une perpendiculaire sur les faces, et une ligne dans la direction du troisième axe de conductibilité du cristal, le plan de ces deux lignes contiendra deux axes principaux de conductibilité de la substance. Cela posé, *le centre des courbes isothermes sur une face quelconque du cristal sera toujours dans l'angle aigu formé par la perpendiculaire aux faces, et celui des deux axes qui correspond à la plus grande conductibilité.*

Point dont la température est la plus grande sur chaque face.

Les ellipsoïdes isothermes dans un solide indéfini ayant au même instant des températures d'autant plus faibles que leurs axes sont plus grands, il s'ensuit que le point d'un plan donné, qui a la température la plus élevée, est celui qui appartient au plus petit ellipsoïde isotherme qui rencontre ce plan. C'est donc le point commun à ce plan et à l'ellipsoïde qui lui serait tangent. Ce point étant sur le diamètre conjugué de la direction du plan, est donc le centre des ellipses isothermes dans ce plan ; et comme les courbes isothermes sur les faces d'une plaque sont les mêmes que si cette plaque faisait partie du solide indéfini, on peut énoncer la proposition suivante :

Le point le plus échauffé, à un instant quelconque sur chaque face d'une plaque, est le centre des ellipses isothermes sur cette face.

Comme d'ailleurs nous avons prouvé que les époques du maximum de température sur les divers ellipsoïdes isothermes s'éloignaient proportionnellement au carré de leurs dimensions, on peut encore remarquer que *le centre des ellipses isothermes est aussi le point qui atteint le premier son maximum de température.*

Expression des températures des différents points de la plaque.

Nous avons démontré jusqu'ici diverses propriétés importantes des températures de la plaque ; mais nous n'avons pas donné la formule qui les représente à chaque instant pour tous les points. C'est ce que nous allons faire maintenant en nous appuyant sur quelques-unes des propositions qui

viennent d'être établies; car le calcul direct de ces températures offrirait quelque difficulté.

Désignons par V la température dans la plaque proposée, en supposant sa conductibilité extérieure nulle; par ν la température qu'on y observe d'après les données réelles, les conductibilités de ses faces étant H_1 et H_2 , et posons

$$\frac{H_1 + H_2}{2c\Delta} = h.$$

Enfin soit ν_1 la température qu'on y observerait si elle faisait partie d'un solide indéfini, auquel cas la fonction $\varphi(t)$ de l'équation (13) serait $\frac{1}{2t}$. Supposons que les trois fonctions ν , ν_1 , V soient égales, non pas précisément pour $t = 0$, mais pour une valeur très-petite t_0 , afin d'éviter les embarras qui proviendraient de la valeur zéro, que nous avons toujours exclue dans nos approximations. Il est évident d'ailleurs que, les températures variant peu dans le temps très-court t_0 , il n'en résultera pas d'erreur sensible dans les résultats, où l'on pourra d'ailleurs supposer que t_0 décroisse autant qu'on le voudra.

Cela posé, d'après le théorème que nous avons démontré pour la réduction du cas des conductibilités extérieures quelconques, au cas où elles sont nulles, nous aurons

$$\nu_1 = V e^{-\frac{1}{2} h \frac{t}{t_0}} = V \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\nu = V e^{-\frac{2h}{t}(t-t_0)};$$

donc, en éliminant V ,

$$\nu = \nu_1 e^{-\frac{2ht}{t}} \frac{1}{t^2} e^{\frac{2ht_0}{t}} t_0^{-\frac{1}{2}}.$$

Substituant à ν_1 la valeur donnée par la formule (3), et représentant par M le coefficient constant, dans lequel entrera t_0 , nous aurons pour l'expression des températures cherchées,

$$(15) \quad \nu = M \cdot t^{-1} e^{-\frac{2h}{t}t} e^{-\frac{1}{4t} \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \right)}.$$

Il ne faut pas oublier que les coordonnées x, y, z sont comptées sur les axes principaux de conductibilité qui passent par le centre de température de

l'état initial, et par rapport auxquels la plaque peut avoir une position arbitraire.

Cette formule représente sensiblement les températures de la plaque à chaque instant; mais elle ne satisfait pas pour cela aux équations différentielles auxquelles la formule exacte serait tenue de satisfaire.

On tirerait facilement de l'équation (15) les résultats déjà obtenus et fondés d'ailleurs sur les mêmes considérations premières.

Ainsi, par exemple, on reconnaît immédiatement que de tous les points d'une face de la place, celui qui a la plus forte température à une époque quelconque est celui qui rend $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}$ le plus petit possible. C'est donc le point de contact de cette face avec l'ellipsoïde principal qui lui est tangent. On voit aussi facilement que ce même point est le centre de toutes les ellipses isothermes de cette face à une époque quelconque.

Il est facile de vérifier la formule (15), dans le cas que nous avons calculé directement, où la plaque est taillée perpendiculairement à un des axes principaux. Supposons, par exemple, que cet axe soit celui des z ; alors la quantité z étant très-petite, on peut la supposer égale à zéro sans altérer sensiblement les valeurs de v , et l'on obtiendra

$$v = M t^{-1} e^{-\frac{2h}{t}t} e^{-\frac{1}{4t}\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B}\right)},$$

formule qui coïncide avec l'équation (11), comme cela devait être.



NOTE

SUR

LA SIMILITUDE EN MÉCANIQUE;

PAR M. J. BERTRAND.

Galilée examine, dans un de ses Dialogues, une question qui doit en effet se présenter à l'esprit de tous ceux qui commencent l'étude de la mécanique : Comment se fait-il que tant de machines qui réussissent en petit deviennent impraticables sur une plus grande échelle? S'il est vrai que la géométrie soit la base de la mécanique, de même que les dimensions plus ou moins grandes ne changent pas les propriétés des triangles des cercles ou des cônes, de même une grande machine entièrement conforme à une autre plus petite semblerait devoir réussir dans les mêmes circonstances et résister aux mêmes causes de destruction. Galilée traite cette question au point de vue de l'équilibre et de la résistance des matériaux, et il ne lui est pas difficile de montrer, par de nombreux exemples, que la résistance d'un système solide n'est pas proportionnelle à ses dimensions.

Newton, dans le livre des *Principes*, a été beaucoup plus loin ; il a donné la condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes semblables au point de vue géométrique le soient aussi au point de vue mécanique, c'est-à-dire pour que non-seulement les lignes de l'un des systèmes, mais encore les temps, les forces et les masses, aient et conservent un rapport constant avec les éléments homologues de l'autre système. J'avoue que ce théorème de Newton, qui n'a été reproduit à ma connaissance dans aucun Traité de mécanique, me paraît devoir être mis au nombre des principes les plus féconds et les plus simples de la science : on verra dans cette Note que la plupart des théorèmes les plus importants de la dynamique peuvent en être regardés comme de simples corollaires ; on peut aussi y voir l'origine de théorèmes très-importants dus à Fourier et à M. Cauchy.

Le théorème de Newton est énoncé par lui de la manière suivante :

« Si deux systèmes semblables de corps sont composés d'un nombre égal
» de particules, et que les particules correspondantes soient respectivement
» semblables et proportionnelles dans les deux systèmes, qu'elles soient
» posées de même entre elles et qu'elles aient une raison donnée de densité,
» qu'elles commencent à se mouvoir semblablement dans des temps propor-
» tionnels, et qu'enfin les forces *accélératrices* correspondantes soient inver-
» sement comme le diamètre des particules et directement comme le carré
» des vitesses, les particules continueront à se mouvoir de la même manière
» dans des temps proportionnels. »

Ce théorème constitue une véritable théorie de la similitude en mécanique ; on voit qu'un système quelconque étant donné, il existe un nombre infini de systèmes possibles que l'on peut regarder comme semblables à celui-là, et qu'au lieu d'un seul rapport de similitude comme en géométrie, il y a lieu d'en considérer quatre ; savoir, celui des longueurs, celui des temps, celui des forces et celui des masses : l'un de ces rapports est, d'après le théorème de Newton, une conséquence des trois autres.

La démonstration de Newton est d'une clarté et d'une simplicité admirables ; mais comme elle est liée d'une manière assez intime à quelques propositions précédentes, j'ai cherché à lui substituer un raisonnement fondé sur la forme des équations de la dynamique, raisonnement qui, dans le fond, ne diffère pas de celui que M. Cauchy a employé pour déduire des équations du mouvement des corps élastiques les lois des vibrations des corps semblables, découvertes expérimentalement par Savart. Au reste, ce théorème de M. Cauchy, bien qu'analogue à celui de Newton, ne peut pas en être regardé comme un corollaire.

Après avoir démontré le théorème général sur lequel je me suis proposé d'appeler l'attention des personnes qui s'occupent de mécanique, je montre les nombreuses conséquences que l'on en peut déduire, notamment les lois de l'oscillation des pendules simples, celles de la force centripète, des vibrations des cordes, de la vitesse de propagation du son dans différents gaz, et enfin un théorème relatif aux turbines, démontré par M. Combes dans ses *Recherches théoriques et expérimentales sur les turbines*.

I.

Démonstration du principe de Newton.

Considérons l'équation générale dont on peut déduire la solution de tous les problèmes de mécanique

$$(1) \quad \sum \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z = 0.$$

Supposons que le mouvement d'un certain système ait été étudié et que l'on connaisse pour chaque point en fonction du temps les coordonnées x, y, z , qui satisfont à l'équation (1) pour toutes les valeurs de $\delta x, \delta y, \delta z$, compatibles avec les liaisons.

Considérons un second système semblable au premier au point de vue géométrique, c'est-à-dire tel, qu'au commencement du mouvement il forme un système semblable; et que les équations de liaisons permettent des mouvements semblables. Soit α le rapport de similitude linéaire des deux systèmes. Supposons, en outre, que les masses des points homologues soient β fois plus grandes, et que les forces motrices, des points homologues et pour des positions semblables, soient γ fois plus grandes dans le second système. Pour avoir l'équation relative au mouvement de ce second système, il suffira de remplacer dans l'équation (1) $x, y, z, \delta x, \delta y, \delta z$ par $\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha \delta x, \alpha \delta y, \alpha \delta z$, m par βm , X, Y, Z par $\gamma X, \gamma Y, \gamma Z$. Or il est facile de voir que toutes ces substitutions ne changeront rien à l'équation si on a soin de remplacer, en même temps, t par ϵt , ϵ étant défini par l'équation

$$(2) \quad \epsilon^2 = \frac{\alpha \beta}{\gamma}.$$

On peut donc dire que les deux systèmes se mouvront semblablement, pourvu qu'on les compare après des intervalles de temps dont le rapport soit ϵ .

Je me suis contenté d'indiquer rapidement cette démonstration, parce que celle de Newton, quoiqu'un peu plus longue, permet mieux de comprendre la véritable raison du théorème, et me semble en même temps plus propre à guider dans les nombreuses applications dont il est susceptible.

II.

Corollaire I. — Si deux points de même masse sont attirés vers un centre fixe proportionnellement à la distance, et qu'ils partent sans vitesse l'un du point M, l'autre du point M', ils mettront le même temps à parvenir au point attirant, et, à un instant quelconque, leurs distances au point O seront dans le rapport de OM à OM'.

En effet, les deux systèmes formés par le centre d'action O, avec chacun des deux points M et M', satisfont aux conditions de similitude définies plus haut: le rapport de similitude des longueurs est $\frac{OM}{OM'}$; ainsi que celui des forces, celui des masses est l'unité. Il faudra donc, d'après la formule (1), que celui des temps soit aussi l'unité; les deux systèmes resteront donc toujours semblables, et conserveront, au bout d'un même temps, le même rapport de similitude: d'où l'on conclut que les deux points mobiles arriveront en même temps au point attirant.

Le théorème précédent est très-connu; on sait qu'on en déduit facilement l'isochronisme des oscillations sur la cycloïde. La même démonstration s'appliquerait au cas où les deux points mobiles éprouveraient une résistance proportionnelle à leur vitesse et permettrait alors de prouver que la cycloïde est tautochrone dans un milieu qui résiste suivant cette loi.

Si l'attraction vers le point O était proportionnelle à la puissance $n^{i\grave{e}me}$ de la distance, le théorème de Newton prouverait que les deux points M et M' seraient à des distances proportionnelles du point O, non plus au bout du même temps, mais après des temps dont le rapport serait $\left(\frac{OM'}{OM}\right)^{\frac{1-n}{2}}$. Ce théorème, plus curieux qu'utile, a été démontré par Euler dans sa *Mécanique*, par la considération de l'intégrale qui exprime le temps nécessaire pour parcourir un intervalle donné.

III.

Corollaire II. — Si deux points matériels dont les masses sont M et M' parcourent des cercles de rayon r et r' avec des vitesses constantes telles, que les temps des révolutions soient t et t' , les forces centripètes nécessaires pour produire les mouvements seront entre elles comme $\frac{mr}{t^3}$ est à $\frac{m'r'}{t'^3}$.

Remarquons, en effet, que les deux points peuvent être considérés comme formant des systèmes semblables : le rapport de similitude des longueurs est $\frac{r}{r'}$, celui des temps $\frac{t}{t'}$, celui des masses $\frac{m}{m'}$; il faut donc, par le théorème de Newton, que les forces soient dirigées de la même manière et que leurs intensités soient dans un rapport égal à

$$\frac{\frac{m}{m'} \times \frac{r}{r'}}{\frac{t^2}{t'^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{mr}{t^2} \div \frac{m'r'}{t'^2}.$$

Un raisonnement très-simple prouverait que si la vitesse est constante, cette force centripète doit être normale au cercle.

IV.

Corollaire III. — Si deux pendules simples de longueur l et l' oscillent sous l'influence de gravités représentées par g et g' , en supposant qu'ils soient écartés d'un même angle de la position verticale, les temps qu'ils mettront à faire leurs oscillations, ou plus généralement à parcourir des arcs semblables, seront dans le rapport de $\sqrt{\frac{l}{g}}$ à $\sqrt{\frac{l'}{g'}}$.

Les deux pendules écartés d'un même angle forment, en effet, deux systèmes semblables : le rapport de similitude des longueurs est $\frac{l}{l'}$, celui des forces $\frac{g}{g'}$, celui des masses l'unité; on en conclut, par le théorème de Newton, que le rapport de similitude des temps, c'est-à-dire le rapport des temps nécessaires pour parcourir des arcs semblables, est

$$\frac{\sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt{\frac{l'}{g'}}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt{\frac{l'}{g'}}}.$$

V.

Corollaire IV. — Soient une corde de longueur l tendue par un poids P et dont la masse totale soit m ; une autre corde de longueur l' tendue par un poids P' et de masse totale : m' fera ses oscillations dans un temps dont le rap-

port au temps d'oscillation de la première est

$$\sqrt{\frac{m'l'}{P'}} : \sqrt{\frac{ml}{P}}.$$

Les deux cordes peuvent être, en effet, considérées comme deux systèmes semblables, car on suppose leurs rayons négligeables et n'ayant d'autre influence que celle qu'ils exercent sur la masse : le rapport de similitude des longueurs est $\frac{l}{l'}$, celui des masses $\frac{m}{m'}$, celui des forces $\frac{P}{P'}$. Si donc, après avoir écarté semblablement ces cordes de leurs positions d'équilibre, on les abandonne à elles-mêmes, les mouvements seront semblables, et, par le théorème de Newton, le rapport de similitude des temps, c'est-à-dire le rapport des temps nécessaires pour accomplir des mouvements semblables, sera

$$\sqrt{\frac{l}{l'} \cdot \frac{m}{m'} \cdot \frac{P}{P'}} \text{ ou } \sqrt{\frac{ml}{P}} : \sqrt{\frac{m'l'}{P'}}.$$

VI.

Corollaire V. — Si deux cordes de même nature, mais de longueur différente, sont tendues par un même poids et chargées d'un nombre quelconque de curseurs placés semblablement et dont les masses soient dans le même rapport que la longueur des cordes, elles feront toutes leurs oscillations dans des temps proportionnels à ces longueurs.

Cette proposition, démontrée et vérifiée par M. Duhamel, est une conséquence du théorème de Newton ; on voit, en effet, qu'on peut considérer les deux systèmes comme semblables : le rapport de similitude des poids étant l'unité, celui des longueurs, ainsi que celui des masses $\frac{l}{l'}$, on en conclut alors que celui des temps doit être également $\frac{l}{l'}$.

VII.

Corollaire VI. — Si dans un gaz dont la densité est d et l'élasticité e , un ébranlement se propage avec une vitesse v , l'élasticité devenant e' , et la densité d' , un ébranlement semblable se propagera avec une vitesse v' , satis-

faisant à la proportion

$$v : v' :: \sqrt{\frac{e}{d}} : \sqrt{\frac{e'}{d'}}.$$

Les deux gaz peuvent être, en effet, considérés comme formant deux systèmes semblables : le rapport de similitude des longueurs est l'unité, celui des forces $\frac{e}{e'}$, et celui des masses $\frac{d}{d'}$; donc celui des temps doit être, par le théorème de Newton, $\sqrt{\frac{e}{d}} : \sqrt{\frac{e'}{d'}}$. Or ici le rapport des temps est le même que celui des vitesses, puisque, dans les deux systèmes, les longueurs sont les mêmes.

La démonstration de ce dernier corollaire pourrait donner lieu à une objection : Dans l'ignorance complète où nous sommes de la constitution entière des gaz, de la forme et de la distance de leurs molécules, est-il permis de considérer deux masses gazeuses comme formant deux systèmes semblables, tels que Newton les a considérés ? Il est facile de reconnaître que cette hypothèse, sans être absolument rigoureuse, est permise si on adopte les équations générales de l'hydrodynamique, dans lesquelles on considère les fluides comme continus et où les actions moléculaires ne figurent que par la force fictive qu'on appelle pression.

VIII.

Corollaire VII. — Si deux turbines *semblables* se meuvent avec des vitesses angulaires réciproquement proportionnelles à la racine carrée de leurs dimensions linéaires, les hauteurs de chute étant proportionnelles à ces mêmes dimensions, elles utiliseront la même fraction du travail dépensé.

Ce théorème est une conséquence de deux propositions analogues établies par M. Combes dans ses *Recherches sur les turbines*; on va voir qu'il se déduit aussi sans difficulté du principe général de Newton. Les deux turbines, construites semblablement et mues par des chutes proportionnelles à leurs dimensions, forment, en effet, deux systèmes semblables, pourvu que l'on admette que les résistances, que l'on peut toujours regarder comme des poids à soulever avec des vitesses uniformes, agissent semblablement sur les deux systèmes.

Soit α le rapport de similitude des longueurs ; celui des masses homo-

logues est évidemment α^3 , ainsi que celui des forces de pesanteur qui sollicitent ces masses : donc, par le théorème de Newton, les temps après lesquels les deux systèmes sont dans des positions semblables doivent avoir pour rapport $\sqrt{\frac{\alpha \times \alpha^3}{\alpha^3}}$ ou $\sqrt{\alpha}$; par conséquent, les deux poids que les turbines peuvent soulever, et qui sont dans le rapport de α^3 à 1, seront élevés à des hauteurs dont le rapport est α . Dans des temps qui sont comme $\sqrt{\alpha}$ à 1, les quantités de travail produites dans un même temps sont donc comme $\alpha^3 \sqrt{\alpha} : 1$; ce qui est précisément le rapport des quantités de travail dépensées, car la seconde turbine a une hauteur de chute α fois plus grande, et d'après la loi de mouvement supposée, elle dépense une quantité d'eau $\alpha^2 \sqrt{\alpha}$ fois plus grande.

Dans le raisonnement précédent, nous n'avons fait entrer en ligne de compte que le poids de l'eau, et nullement les forces de réaction entre les molécules d'eau et la turbine, parce que ces forces peuvent être considérées comme provenant des liaisons, et il n'est pas nécessaire de les évaluer, puisqu'elles ne figurent pas explicitement dans l'équation générale de la mécanique dont nous avons déduit la démonstration du principe.

IX.

Scolie. — On voit, par les exemples précédents, quelle est la portée du principe sur lequel j'ai essayé d'appeler l'attention et combien sont diverses les applications que l'on en peut faire ; il est vrai que l'on ne peut en déduire que des rapports, et que, par conséquent, il ne pourra servir à résoudre une question que quand on en aura déjà résolu une analogue et de difficulté analytique équivalente : il peut y avoir cependant une grande utilité à déterminer, dans certains cas, les relations qui existent entre les mouvements de deux systèmes, lors même que chacun d'eux ne serait pas susceptible d'une détermination théorique rigoureuse. On devrait, par exemple, faire usage de ce principe toutes les fois que l'on cherche à prévoir, par des expériences en petit, la valeur d'une invention mécanique dont la réalisation complète serait trop coûteuse. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une expérience relative à l'action d'une locomotive et qu'on soit à même d'observer un système dont les dimensions géométriques soient α fois plus petites

que celles du système projeté; il est évident que le rapport de similitude des masses et des forces devra être α^3 dans les deux systèmes, et par conséquent celui des temps égal à $\sqrt{\alpha}$, en sorte que les vitesses doivent être dans le rapport de $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ à l'unité, c'est-à-dire proportionnelles à la racine carrée des dimensions: de plus, les forces de pesanteur ne sont pas ici les seules forces appliquées aux deux systèmes, et il est essentiel que les autres forces soient aussi dans le rapport de α^3 à 1; par conséquent, les pressions exercées par la vapeur sur les surfaces homologues devront être dans ce rapport, et pour cela il faut que leurs tensions rapportées à des surfaces égales soient dans le rapport de α à 1. Les frottements de glissement étant proportionnels aux pressions, leur rapport sera ce qu'il doit être; mais les frottements de roulement, étant en raison inverse du diamètre des roues, seront trop grands dans le petit système, et cela produira une cause d'erreur qu'il est impossible d'éviter, mais qu'il n'en est pas moins essentiel de connaître. La résistance de l'air supposée proportionnelle aux surfaces et aux carrés de la vitesse se modifierait d'un système à l'autre de manière à ne pas altérer leur similitude.

Si par exemple on faisait un modèle quatre fois plus petit que la machine réelle, il faudrait, pour avoir des systèmes complètement comparables, donner une vitesse moitié moindre, diminuer pour cela de moitié la tension de la vapeur, et faire avec les roues des wagons une substance pour laquelle le coefficient de frottement soit quatre fois moindre. Cette dernière condition n'est pas réalisable.

J'ignore si ces précautions ont été prises toutes les fois qu'on a voulu tirer les déductions d'expériences exécutées en petit.

TABLE DES MATIÈRES.

| | Pages. |
|--|--------|
| Mémoire sur la théorie générale des surfaces, par M. <i>Ossian Bonnet</i> | 1 |
| Remarque sur un Mémoire de M. Bertrand, par M. <i>J.-A. Serret</i> | 147 |
| Note sur la théorie des mouvements relatifs, par M. <i>J. Bertrand</i> | 149 |
| Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les cristaux, par M. <i>J.-M.-C. Duhamel</i> | 155 |
| Note sur la similitude en mécanique, par M. <i>J. Bertrand</i> | 189 |

FIN DE LA TABLE. DU XXXII^e CAHIER.

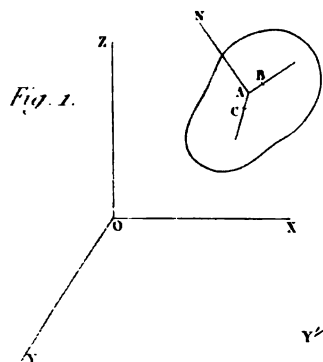


Fig. 1.

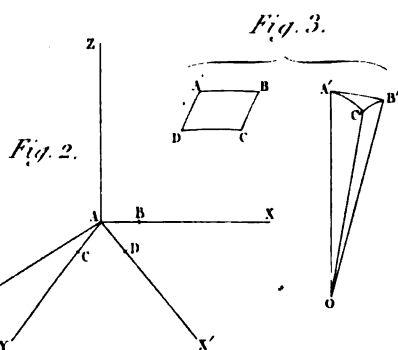


Fig. 2.

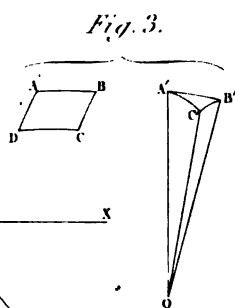


Fig. 3.

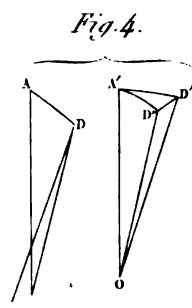


Fig. 4.

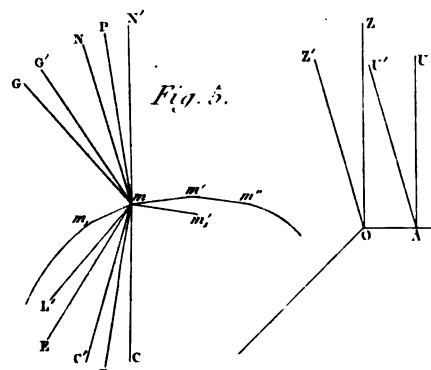


Fig. 5.

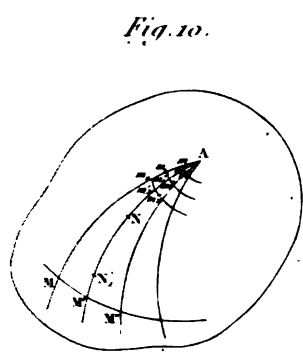


Fig. 10.

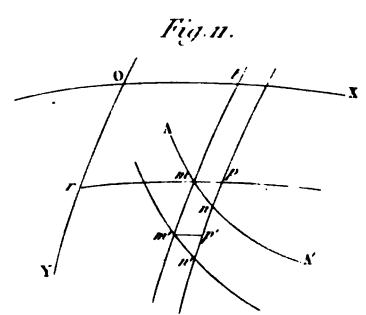


Fig. 11.

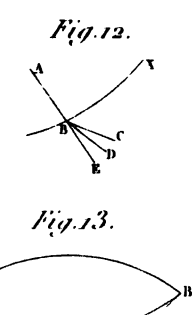


Fig. 12.

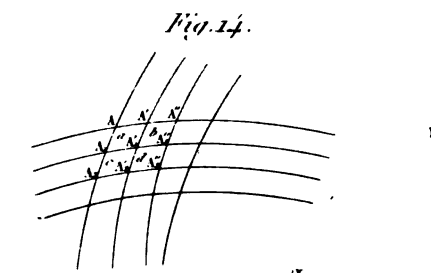


Fig. 14.

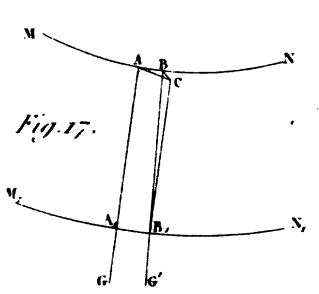


Fig. 17.

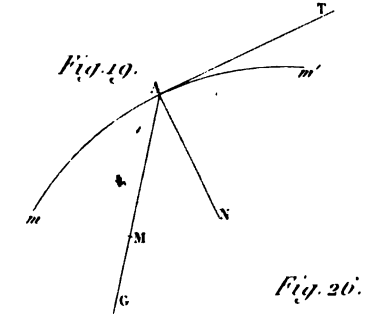


Fig. 19.

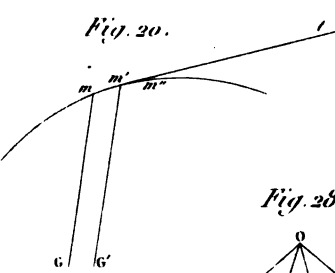


Fig. 20.

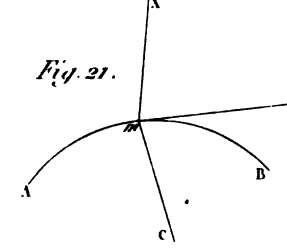


Fig. 21.



Fig. 23.

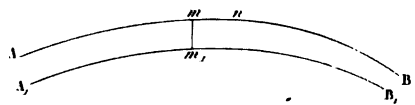


Fig. 26.

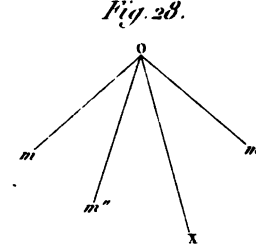


Fig. 28.

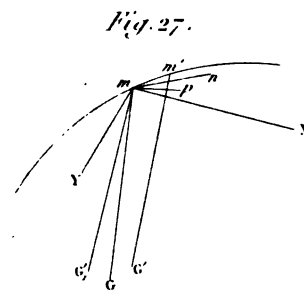


Fig. 27.

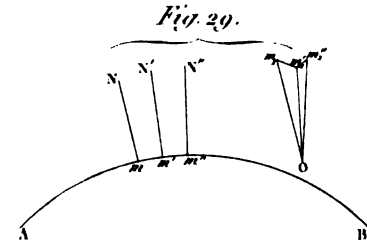


Fig. 29.

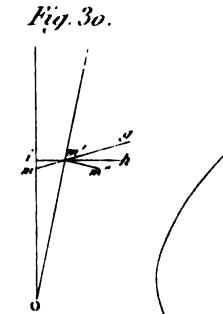
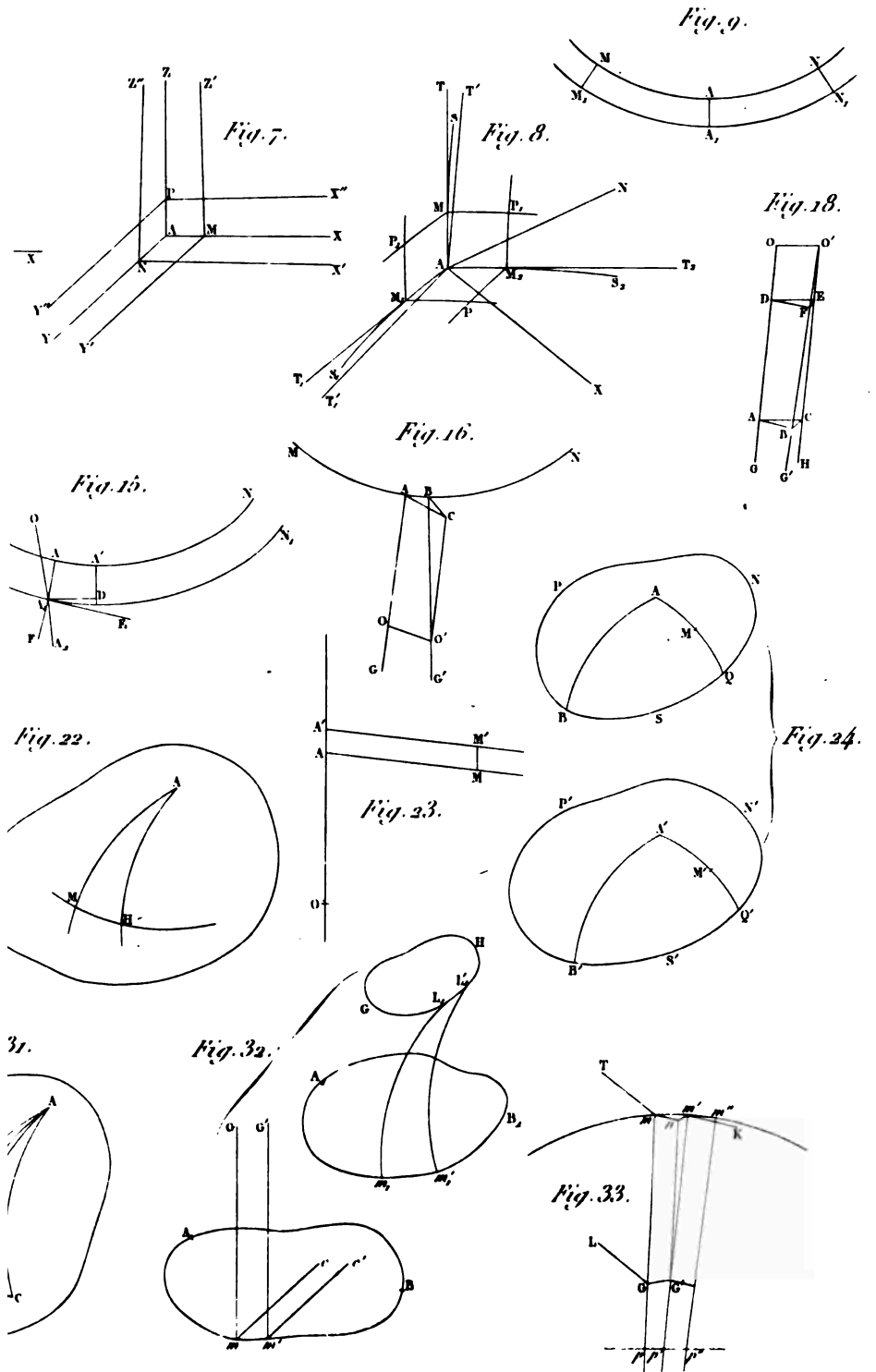


Fig. 30.

OSIAN BOXNET.



JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Cet ouvrage se trouve aussi :

| | | | |
|-----------------------|--|---------------------|--|
| A ANGOULÊME .. | chez PÉREZ-LECLERC. | A NANCY..... | chez G. GRIMBLot et C^{ie}. |
| BORDEAUX.... | — CHAUMAS. | NANTES..... | { — FOREST. |
| BOURGES..... | — VERMEIL. | | — GUÉRAUT. |
| BREST..... | — M^e V^e LEFOURNIER. | ORLÉANS.... | — GATINEAU. |
| CHERBOURG... | — LEFRANÇOIS. | RENNES..... | — VERDIER. |
| LILLE..... | — VANACKÈRE. | ROCHEFORT.. | — M^{me} FLEURY. |
| LORIENT..... | — LEROUX-CASSART. | ROUEN..... | — LEBRUMENT. |
| LYON..... | { — PÉRISSE frères. | | — TREUTTEL et WURTZ. |
| | — BRUN et C^{ie}. | STRASBOURG. | { — M^{me} LEVRAULT. |
| MARSEILLE.... | — CAMOIN. | | — DERIVAUX. |
| METZ..... | — WARION. | TOULON..... | — MONGE. |
| MONTPELLIER. | — SÉWALLE. | TOULOUSE.... | — GIMET. |

ET A L'ÉTRANGER :

| | | | |
|-----------------------|-----------------------------------|----------------------|---|
| A AMSTERDAM... | chez VAN BAKKENES. | A MADRID..... | } chez M^{me} ANT. POUPART et frère. |
| BERLIN..... | — B. BEHR. | | |
| BRUXELLES... | — DECQ.—PÉRICHON. | | — MONNIER. |
| CAMBRIDGE... | — DEIGTON. | MILAN..... | — DUMOLARD. |
| COPENHAGUE.. | — HOST. | NAPLES..... | — DUFRESNE. |
| FLORENCE..... | — PIATTI. | NEW-YORK.... | — BÉARD et MONDON. |
| GÈNES..... | — BEUF. | PÉTERSBOURG. | — GRAFF. — BELLIZARD. |
| GENÈVE..... | — CHERBULIEZ. | ROME..... | — MERLE. |
| LA HAYE..... | — VAN-CLEEF frères. | STOCKHOLM... | — BONIER. |
| LEIPSIG..... | — MICHELSEN. | TURIN..... | — BOCCA. |
| LONDRES..... | — BAILLIÈRE. | VIENNE..... | — ROHMANN. |
| — | — DULAU et C^{ie}. | | |

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ
PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION
DE CET ÉTABLISSEMENT.

~~~~~  
TRENTÉ-TROISIÈME CAHIER.  
~~~~~

TOME XIX.



PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

—
A LEIPZIG, CHEZ MICHELSEN.

||

A LONDRES, CHEZ DULAU ET C^{ie}.

—
1850.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

SUR

LES SYSTÈMES FORMÉS PAR DES POINTS

DISTRIBUÉS RÉGULIÈREMENT SUR UN PLAN OU DANS L'ESPACE; [1848.]

PAR M. A. BRAVAIS,

Lieutenant de vaisseau, Professeur à l'École Polytechnique.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 11 décembre 1848.)

§ I. — DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

Pour obtenir un système de points distribués régulièrement dans l'espace, prenons deux points arbitrairement, et joignons-les l'un à l'autre par une ligne droite que nous prolongerons indéfiniment dans les deux sens. Chargeons cette droite d'une série illimitée d'autres points, tous équidistants entre eux, et séparés par un intervalle constant, égal à la distance des deux points primordiaux. Le système rectiligne de ces points équidistants recevra, dans le cours de ce Mémoire, le nom de *Rangée*. L'intervalle fondamental qui sépare deux points voisins sera désigné sous le nom de *paramètre* de la Rangée.

Prenons une deuxième Rangée de même paramètre; plaçons-la parallèlement à la précédente, dans une situation relative arbitrairement choisie, et joignons entre elles ces deux Rangées par un plan géométrique qui, de sa

nature, sera illimité en tous sens. Chargeons ce plan d'une série de Rangées pareilles, parallèles et équidistantes entre elles; enfin, pour fixer la position de ces Rangées, faisons glisser chacune d'elles, tout d'une pièce et dans le sens de sa longueur, jusqu'à ce que les points qui, sur chaque Rangée, servent de départ à toute la série de ses points, soient situés sur une même droite, plus ou moins inclinée sur la direction commune des Rangées. Nous désignerons sous le nom générique de *Réseau* une telle réunion de points ainsi distribués sur le plan.

Prenons un second Réseau de mêmes forme et grandeur que le précédent; plaçons-le sur un plan parallèle, séparé du premier par un intervalle arbitraire, en ayant soin que toutes les lignes homologues soient semblablement dirigées dans les deux Réseaux, ce qui peut se faire par le transport commun de toutes les parties du Réseau primitif, parallèlement à elles-mêmes. Disposons une infinité de Réseaux semblables et semblablement tournés, sur une infinité de plans parallèles aux deux premiers, tous équidistants entre eux, et prenons le soin de faire glisser chaque Réseau dans son plan, jusqu'à ce que tous les points qui servent de départ soient situés sur une même droite, nécessairement extérieure au plan du Réseau primitif. Le système de points ainsi obtenu sera désigné sous le nom d'*Assemblage* dans le cours de ce Mémoire; il est illimité suivant ses trois dimensions.

La *fig. 1* offre le résultat des opérations que nous venons d'effectuer: $OAA'A''...$ est la première Rangée; la série des points A, A', A'', \dots , doit, par la pensée, être supposée prolongée à gauche de O ; $BPP'...$ forme la seconde Rangée. Des points B', B'', \dots , partent d'autres Rangées pareilles et parallèles; les têtes de Rangées O, B, B', B'', \dots , sont assujetties à être en ligne droite. Toutes ces Rangées étant équidistantes, il est évident que l'on a

$$OB = BB' = B'B'' \dots;$$

de sorte que $OBB'B''...$ est aussi une Rangée du système: mais elle diffère de $OAA'A''...$ par sa direction, et aussi, dans le cas général, par la grandeur de son paramètre, qui est évidemment égal à OB .

Un second Réseau, pareil au Réseau $OAA'A''...BPP'...B'B''...$, a son point de départ en D , et s'étend, à partir de D , dans un plan parallèle au plan OAB ; sa première Rangée est $DQQ'Q''...$; les autres partent de R, R', R'', \dots

Ces points sont, sur le nouveau plan, les homologues de B, B', B'', Les autres Réseaux du système partent des points D', D'', Tous les points O, D, D', D'', ..., sont en ligne droite, et, par suite de l'équidistance des plans parallèles qui contiennent chacun des Réseaux, on a

$$OD = DD' = D'D'' \dots;$$

de sorte que ODD'D''... est aussi une Rangée, mais qui différera de OAA'A''..., OBB'B''... par la direction et par la grandeur de son paramètre.

L'Assemblage ainsi obtenu offre une distribution régulière caractérisée par les propriétés suivantes, assez évidentes pour n'exiger aucune démonstration.

Aucun des points intégrants ne se distingue des autres par une particularité quelconque de position relative.

La configuration formée par l'Assemblage, supposé illimité, autour d'un de ses points arbitrairement choisi, est la même, quel que soit le point adopté. Si, par exemple, ce point est pris pour origine de coordonnées quelconques rectangulaires ou obliques, on retrouvera, autour de chaque point pris successivement pour origine, des points semblablement situés et de mêmes coordonnées, pourvu que, dans le changement d'origine, les nouveaux axes aient conservé leur direction première.

Avant de passer outre, j'affecterai une désignation particulière aux points qui composent un Réseau ou un Assemblage. Il convient, en effet, de les distinguer d'avec les points purement mathématiques qui existent en un lieu quelconque de l'espace.

En conséquence, je les appellerai des *Sommets*. On peut, sans inconvénient et pour fixer les idées, attribuer à ces Sommets des dimensions très-petites, en faire de véritables molécules, et attacher spécialement le nom de Sommet aux centres de figure de ces molécules dont la forme polyédrale restera d'ailleurs indéterminée.

Je supposerai ces Sommets liés entre eux par des forces telles, que l'Assemblage entier soit invariable de forme, toutes les distances mutuelles restant les mêmes, mais soit cependant susceptible de se mouvoir dans l'espace comme un corps solide, soit parallèlement à lui-même, soit en tournant

autour d'un axe donné, toutes les fois qu'il sera nécessaire de lui imprimer de tels mouvements de translation ou de rotation.

Si l'on transporte tout le système parallèlement à lui-même, un Sommet tel que A (*fig. 1*) venant occuper le lieu qu'occupait précédemment un autre Sommet tel que B, chacun des autres Sommets viendra pareillement occuper un lieu de l'espace, abandonné par l'un des Sommets du système à l'origine du mouvement. Je dis alors que *le lieu des Sommets n'a pas été troublé* par le mouvement général imprimé à l'Assemblage, ou plus simplement, qu'il y a eu *restitution des lieux des Sommets*.

Tant que les droites OAA', BPP',... et les plans qui les unissent restent tracés dans l'espace, l'Assemblage de la *fig. 1* conserve l'empreinte des opérations qui ont servi à le construire. Mais nous pouvons supprimer par la pensée toutes ces droites et tous ces plans, et chercher à résoudre un problème inverse de celui qui vient de nous occuper, problème dont l'énoncé sera le suivant :

PROBLÈME I. — *Un Assemblage étant donné, retrouver les Rangées, plans et Réseaux qui peuvent le produire.*

Prenons au hasard deux points ou Sommets, tels que O et A (*fig. 1*), appartenant à l'Assemblage donné, et joignons-les par la droite OA; s'il existait sur la droite de jonction, entre O et A, d'autres Sommets *a, b, c,...*, appartenant au système, nous considérerions spécialement le Sommet *a* le plus voisin de O, et Oa serait alors un sous-multiple exact de OA. Ainsi l'on peut toujours supposer qu'entre les Sommets choisis O et A, il n'existe aucun autre Sommet intermédiaire.

Prolongeons OA dans les deux sens, et prenons

$$AA' = OA, \quad A'A'' = AA', \dots;$$

tous ces points A', A''... appartiendront à notre Assemblage en vertu de la loi générale qui caractérise la distribution régulière. Cette première opération détermine l'une des Rangées du système. Il importe toutefois de remarquer que la Rangée ainsi retrouvée n'est pas nécessairement l'une de celles qui ont servi dans l'origine à construire l'Assemblage.

En dehors de la Rangée OAA'A''..., prenons au hasard un Sommet B et joignons OB: si d'autres Sommets existaient entre O et B, nous ne conser-

verrons que le plus voisin de O. Ainsi nous pouvons toujours supposer qu'entre O et B, il n'existe aucun autre point appartenant au système de l'Assemblage.

Cela posé, sur OB et OA construisons le parallélogramme OAPB; P appartiendra au Réseau du plan OAB. Or, dans l'intérieur de ce parallélogramme, il pourra exister généralement un nombre fini de Sommets, tels que m, n, \dots , appartenant au Réseau du plan. Dans ce cas, on devra rejeter le point B, et le remplacer par celui de ces Sommets dont la distance à OA est un minimum. Appelons-le m ; menons de m la droite mm' parallèle et égale à OA, et achevons le parallélogramme $OA'm'm$. Non-seulement m appartiendra au Réseau, mais on pourra affirmer que le parallélogramme $Om'mA$ n'offre ni dans son intérieur, ni sur ses côtés, aucun point de l'Assemblage général, sauf les quatre Sommets O, A, m, m' .

Pour ne pas compliquer inutilement la *fig.* 1, je reprends le parallélogramme OAPB, et me borne à supposer que le point B a été choisi de manière à satisfaire aux deux conditions suivantes :

- 1°. Qu'entre O et B il n'existe aucun point de l'Assemblage ;
- 2°. Qu'il n'en existe pas non plus dans l'intérieur du parallélogramme construit sur OA et OB. Nous venons de voir qu'il existe toujours au moins un Sommet satisfaisant à ces conditions.

Alors, connaissant les paramètres OA et OB des deux Rangées, non-seulement nous pourrions trouver tous les Sommets appartenant à ces Rangées, mais, par les intersections de deux systèmes de parallèles menés par A, A', A'', ..., et par B, B', B'', ..., nous pourrions reconstituer intégralement le Réseau du plan OAB. Remarquons que ce Réseau n'est pas nécessairement le même que celui qui, dans l'origine, a servi à la construction de l'Assemblage.

Après avoir successivement obtenu une Rangée, puis un Réseau, il ne nous sera pas plus difficile de retrouver le système entier.

Nous choisirons hors du plan OAB un Sommet D, en l'assujettissant à la condition qu'il n'existe aucun Sommet intermédiaire, ni entre O et D sur la ligne de jonction, ni sur la surface du parallélogramme AODQ, ni sur celle du parallélogramme BODR, ni dans l'intérieur du parallépipède OAPSQDRB, construit sur les paramètres OA, OB, OD comme arêtes. On

s'assurera, comme nous l'avons fait pour le point B, dans le cas du plan, que ces conditions sont en effet réalisées.

Il est un moyen simple d'obtenir directement le point D : il consiste à faire mouvoir un plan géométrique parallèlement à lui-même, à partir d'une position initiale dans laquelle il coïncidera avec le plan OAB. Dès que ce plan, dans son mouvement de transport, atteindra un premier Sommet de l'Assemblage, on l'adoptera comme étant le point cherché, et l'on fera de la distance OD le paramètre de la troisième Rangée ODD'D''....

La solution que nous venons de donner prouve que l'on peut résoudre le problème I d'un très-grand nombre de manières différentes, et même il n'est pas difficile de voir que le nombre de ces solutions est infini. En effet, le plan DQSR jouit, dans le système de tous ses parallèles, de la propriété d'être aussi près que possible du plan OAB. Si nous considérons un Sommet quelconque, tel que S, appartenant au Réseau que supporte ce plan, il est évident que nous pouvons remplacer la Rangée OD par la nouvelle Rangée OS; nous obtiendrons alors tous les points de l'Assemblage donné, au moyen des intersections du système des plans parallèles à OAB, par le système des droites menées de chaque point du Réseau OAA'...BB'... parallèlement à OS.

De même, en prenant OS et OA, ou OS et OB pour Rangées primordiales, on pourrait reconstruire l'Assemblage, en prenant pour intermédiaire le Réseau du plan OAS ou celui du plan OBS, ce qui nous donnerait de nouvelles solutions du problème; et puisque le nombre de Sommets d'un Réseau est infini, le nombre de ces solutions l'est également.

Lorsque, dans un Réseau, deux Rangées OA, OB seront telles, qu'aucun Sommet ne tombe dans l'intérieur du parallélogramme construit sur les paramètres OA, OB de ces Rangées, je dirai que ces Rangées sont *conjuguées*; et dans le cas où elles seraient prises pour axes coordonnés, elles prendront le nom d'*axes conjugués*.

Le système des Rangées parallèles à deux Rangées conjuguées OAA', OBB',..., découpe le Réseau en cases parallélogrammiques, toutes égales entre elles. J'appellerai ce parallélogramme (OAPB, *fig. 1*), (OAMB, *fig. 2*), *parallélogramme générateur* ou *maille parallélogrammique du Réseau*.

L'espace indéfini compris entre une Rangée telle que OAA'A'', et sa

plus proche voisine BPP' (*fig. 1*), recevra le nom de *bande*. La bande est caractérisée par cette particularité, qu'il n'existe jamais aucun Sommet dans son intérieur, mais seulement sur les deux droites qui la limitent.

Les deux Rangées parallèles qui contiennent une bande entre elles seront dites *limitrophes*. A chaque Rangée correspondent deux Rangées limitrophes, situées de côtés opposés par rapport à la Rangée donnée. Le plan d'une bande, ou de deux Rangées parallèles, ou, plus généralement, le plan qui contient trois Sommets, non en ligne droite, sera appelé *plan réticulaire* : il porte sur sa surface un Réseau complet de Sommets.

Si, dans l'espace, les paramètres des trois Rangées OA, OB, OC (*fig. 1*) peuvent servir d'arêtes à un parallépipède vide de tout Sommet dans son intérieur, ainsi que sur ses faces latérales, je désignerai ces trois Rangées sous le nom de *Rangées conjuguées*, et sous le nom d'*axes conjugués*, dans le cas où l'on jugerait convenable de les prendre pour axes coordonnés.

Les trois plans qui réunissent deux à deux ces Rangées seront appelés des *plans réticulaires conjugués* ou *plans conjugués*.

Une Rangée sera dite *conjuguée d'un plan réticulaire* lorsque, en prenant sur ce plan deux Rangées conjuguées relativement au Réseau de ce plan, elles seront conjuguées avec la Rangée donnée.

L'espace indéfini compris entre un plan réticulaire et son plus proche voisin, parmi les plans réticulaires qui lui sont parallèles, sera désigné sous le nom de *strate*. Il ne peut exister aucun Sommet dans l'intérieur d'une strate.

Les deux plans réticulaires parallèles qui limitent la strate seront dits *limitrophes*. A chaque plan réticulaire correspondent deux plans limitrophes qui lui sont parallèles, et situés de côtés opposés par rapport au plan donné.

Les trois systèmes de plans réticulaires parallèles aux trois plans conjugués AOB, AOD, BOD (*fig. 1*), découpent l'espace en cellules parallépipédiques, toutes égales et superposables. J'appellerai le parallépipède ainsi obtenu, et construit sur les trois paramètres conjugués OA, OB, OD, *parallépipède générateur* ou *noyau* de l'Assemblage.

La juxtaposition de tels parallépipèdes faces contre faces reproduit tous les Sommets de cet Assemblage.

La fixation de notre terminologie nous permet de résumer les propriétés fondamentales dont jouit un Assemblage quelconque.

« Les Sommets d'un Assemblage sont rangés sur un système de plans
» parallèles et équidistants, et forment, sur chacun de ces plans, un Réseau
» dont la configuration est la même sur chaque plan.

» Dans chacun de ces Réseaux, les Sommets forment des systèmes de
» Rangées parallèles, superposables et équidistantes.

» Sur chaque Rangée, les Sommets sont également espacés entre eux.
» On peut toujours reproduire les Sommets donnés d'un Réseau par les
» intersections, deux à deux, de deux systèmes distincts de droites parallèles
» et équidistantes : tout le plan se trouve alors découpé en cases paral-
» lélogrammiques superposables, et qui ne laissent entre elles aucun espace
» vide.

» On peut toujours reproduire les Sommets d'un Assemblage par les in-
» tersections, trois à trois, de trois systèmes distincts de plans parallèles et
» également distants dans chaque système : l'espace est alors découpé en
» cellules parallélépipédiques, toutes égales, superposables, et ne laissant
» entre elles aucun espace vide.

» La décomposition du plan ou de l'espace en parallélogrammes ou
» parallélépipèdes égaux, dont les sommets coïncident avec les Sommets de
» l'Assemblage, peut se faire d'une infinité de manières différentes. »

§ II. — DES RÉSEAUX EN GÉNÉRAL.

Notations, définitions. — Nous allons considérer le Réseau de la *fig. 2*.
Le Sommet O sera pris pour origine des coordonnées.

Soient OAA'..., OBB'..., les deux Rangées qui ont servi à construire le Réseau, et désignons par a , b les deux paramètres, de sorte que l'on ait

$$(1) \quad OA = a, \quad OB = b.$$

Soient ξ , η les coordonnées linéaires des points du plan rapportées aux axes obliques OA, OB. Pour un Sommet quelconque P, les rapports $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$,

seront des nombres entiers, positifs ou négatifs, que nous appellerons les *coordonnées numériques* du Sommet P, et qui seront représentés par les lettres m, n , si P est un Sommet déterminé, et par les lettres x, y , si P est un Sommet indéterminé du Réseau. On aura, suivant les cas,

$$(2) \quad \frac{\xi}{a} = m, \quad \frac{\eta}{b} = n,$$

$$(3) \quad \frac{\xi}{a} = x, \quad \frac{\eta}{b} = y.$$

L'équation générale du Réseau, considéré comme étant une courbe plane à branches séparées, et évanouissantes en chaque Sommet du Réseau, peut s'écrire analytiquement sous la forme suivante :

$$\sin^2 \frac{\xi}{a} \pi + \sin^2 \frac{\eta}{b} \pi = 0,$$

π étant le nombre 3,14159.... Cette équation est satisfaite pour chaque Sommet, et cesse de l'être pour tout autre point du plan.

PROBLÈME II. — *Trouver l'équation d'une Rangée passant par l'origine et par le Sommet P (fig. 2).*

Soient m, n les coordonnées numériques de P; l'équation de OP en coordonnées linéaires et courantes sera

$$\frac{\xi}{ma} = \frac{\eta}{nb}.$$

Soient x, y les coordonnées numériques d'un Sommet quelconque appartenant à la Rangée OP; on aura

$$(4) \quad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} :$$

c'est l'équation en coordonnées numériques de la Rangée OP.

Si m et n avaient un plus grand diviseur commun D, le point $\frac{m}{D}, \frac{n}{D}$ appartiendrait à la Rangée OP, et serait, de tous les Sommets de cette Rangée, le plus rapproché du Sommet O; mais si m et n sont premiers entre eux, OP est le paramètre de la Rangée.

On peut mettre l'équation (4) sous la forme

$$(5) \quad nx - my = 0.$$

Si l'on pose alors

$$(6) \quad \frac{n}{D} = g, \quad \frac{m}{D} = -h,$$

g et h étant des nombres entiers, premiers entre eux, positifs ou négatifs, l'équation devient

$$(7) \quad gx + hy = 0.$$

THÉORÈME I. — Si m, M (fig. 3) sont deux Sommets d'un Réseau, et si, par un troisième Sommet O , on mène une droite On égale et parallèle à mM , l'extrémité de cette droite sera un quatrième Sommet du Réseau.

Transportons l'origine des coordonnées successivement en m et en O , sans changer la direction des axes; nommons ξ, η les coordonnées de M par rapport aux axes menés par m . Il résulte des propriétés générales des Réseaux et Assemblages (page 3), qu'il existera dans le Réseau un Sommet de mêmes coordonnées, dans le système d'axes menés par O : soit n ce Sommet. La droite On sera égale et parallèle à mM .

Corollaire. — Si l'on prolonge Mm d'une longueur $m\mu = mM$ (fig. 3), μ sera l'un des Sommets du Réseau: ainsi, le Sommet m est un centre géométrique du Réseau, et il en est de même pour tous les autres Sommets.

PROBLÈME III. — Trouver l'équation générale des Rangées parallèles à la Rangée OP (fig. 2).

Par un Sommet à coordonnées numériques m', n' menons une parallèle à OP ; son équation en coordonnées linéaires sera

$$\frac{\xi - m'a}{ma} = \frac{\eta - n'b}{nb}.$$

Si l'on fait disparaître a du premier membre, et b du second, on aura

$$\frac{x - m'}{m} = \frac{y - n'}{n},$$

ou, en tenant compte des équations (6),

$$g(x - m') + h(y - n') = 0.$$

On aurait pu déduire directement cette équation de l'équation (7), en y changeant x et y en $x - m'$ et $y - n'$. Donc

$$gx + hy = gm' + hn',$$

ou

$$(8) \quad gx + hy = C,$$

en désignant le dernier membre par C ; C est nécessairement un nombre entier. Cette équation, aussi générale que possible, comprend tout le système des Rangées parallèles à OP .

Notation, définition. — Nous adopterons désormais la notation (gh) pour représenter tout le système des Rangées parallèles à la droite de l'équation (7); les nombres entiers g, h , positifs ou négatifs, seront les *caractéristiques* de ce système de Rangées, relativement aux axes des x et des y .

PROBLÈME IV. — *Trouver le paramètre des Rangées de notation (gh) .*

Soit δ l'angle AOB (fig. 2); soit A le paramètre de la Rangée OP qui va de l'origine au Sommet dont les coordonnées sont $\frac{m}{D}, \frac{n}{D}$. On aura, par une formule connue,

$$A^2 = \left(\frac{m}{D}\right)^2 a^2 + \left(\frac{n}{D}\right)^2 b^2 + 2 \left(\frac{m}{D}\right) \left(\frac{n}{D}\right) ab \cos \delta,$$

et, si l'on substitue les caractéristiques g, h ,

$$(9) \quad A^2 = h^2 a^2 + g^2 b^2 - 2 gh ab \cos \delta.$$

PROBLÈME V. — *Trouver le nombre de Sommets contenus dans le parallélogramme construit sur les paramètres OA, OP ou OB, OP (fig. 2).*

Supposons que les coordonnées numériques m et n du point P soient positives. Le nombre des Rangées $Bm\dots, B'rn\dots, B''p\dots$, parallèles à l'axe des x , et qui traversent le parallélogramme $OAPQ$, est égal à $n - 1$. Le segment intercepté entre OP et AQ , étant égal au paramètre OA , doit contenir un Sommet, lequel sera situé dans l'intérieur du parallélogramme $OAPQ$, puisqu'il ne peut tomber ni sur OP , ni sur AQ ; donc, le nombre des Sommets contenus dans ce parallélogramme sera $n - 1$. De même pour le parallélogramme $OBPR$, le nombre des Sommets intérieurs sera $m - 1$.

Si m ou n étaient négatifs, on les rendrait positifs, par un échange convenable des demi-axes positifs avec les négatifs.

PROBLÈME VI. — *Trouver l'équation des Rangées limitrophes de OP .*

L'équation générale des Rangées parallèles à OP est

$$gx + hy = gm' + hn';$$

g et h sont des nombres donnés, premiers entre eux ; m' , n' , des nombres arbitrairement choisis.

Or on sait, par la théorie des fractions continues, que l'on pourra toujours déterminer m' , n' de manière à satisfaire soit à l'équation

$$gm' + hn' = +1,$$

soit à l'équation

$$gm' + hn' = -1.$$

L'équation (8) devient alors

$$(10) \quad gx + hy = \pm 1,$$

et représente les deux Rangées $pp' \dots, rr' \dots$, limitrophes de la Rangée OP. Il est évident que l'on ne peut avoir, dans le Réseau, d'autres Rangées plus rapprochées de l'origine O.

Autre démonstration de la solution. — Soient m, n, p, q (fig. 2) les Sommets situés dans l'intérieur du parallélogramme OAPQ. Deux d'entre eux ne peuvent être à même distance de OP; car, si m et p étaient dans ce cas, mp serait parallèle à OP, et sur une Rangée parallèle à OP on aurait un paramètre moindre que OP, ce qui ne peut être.

Donc, si l'on mène les lignes pp', mm', qq', nn' , elles formeront le commencement de la série des Rangées parallèles à OP; ainsi, ces lignes doivent être équidistantes.

Le nombre des Sommets contenus entre OP et AQ étant égal à $n - 1$ (problème V), celui des bandes comprises entre ces deux droites sera égal à n . Donc OA sera partagé en n segments égaux, et l'on aura

$$(11) \quad Op' = \frac{OA}{n} = \frac{a}{n}.$$

Si maintenant on prolonge la Rangée pp' en p'' jusqu'à la rencontre du demi-axe des y négatives, on démontrerait de même, au moyen du parallélogramme construit sur OP et OR, que l'on a

$$(12) \quad Op'' = -\frac{b}{m}.$$

Or l'équation de pp' en coordonnées linéaires est évidemment

$$\frac{\xi}{Op'} + \frac{\eta}{Op''} = 1.$$

Si l'on remplace ξ, η par leurs valeurs tirées des équations (2), Op' et Op'' par leurs valeurs tirées des équations (11) et (12), il viendra

$$nx - my = + 1.$$

De l'autre côté de OP, dans le parallélogramme OBPR, il existe une autre Rangée limitrophe, la Rangée rr' , formant avec OP une bande de même largeur que la bande comprise entre pp' et OP.

Son équation sera évidemment

$$nx - my = - 1;$$

donc les deux Rangées limitrophes sont comprises dans l'équation collective

$$nx - my = \pm 1,$$

et si l'on substitue à m, n , les caractéristiques g, h de la Rangée OP, en remarquant que m et n sont premiers entre eux, puisque OP est un paramètre, celle-ci devient

$$gx + hy = \pm 1.$$

PROBLÈME VII. — *Dans un système de Rangées dont la notation symbolique est (gh) , on demande quel nombre de bandes de ce système est compris entre le Sommet à coordonnées M, N et le Sommet à coordonnées M', N' .*

Concevons que la Rangée pp' (fig. 2), limitrophe de OP, reçoive l'unité pour numéro d'ordre; que la Rangée suivante mm' reçoive le n° 2, et ainsi de suite; puis, que l'on affecte des numéros d'ordre égaux à $-1, -2, -3, \dots$, aux Rangées rr', ss', \dots , situées du côté opposé.

La Rangée n° 1 aura pour équation

$$gx + hy = 1.$$

Celle de la Rangée n° 2, deux fois plus éloignée de l'origine que la précédente, sera

$$gx + hy = 2.$$

La Rangée dont le numéro d'ordre sera C aura pour équation

$$gx + hy = C.$$

D'où l'on voit que, dans l'équation (8), le dernier membre est précisément le numéro d'ordre de la Rangée que l'on considère.

Soient donc C et C' les numéros d'ordre des Rangées passant par les Sommets (M, N) et (M', N') ; on aura

$$\begin{aligned} C &= gM + hN, \\ C' &= gM' + hN', \\ (13) \quad C - C' &= g(M - M') + h(N - N'). \end{aligned}$$

Ainsi le nombre des bandes interceptées entre les deux Sommets donnés aura pour valeur, au signe près,

$$g(M - M') + h(N - N').$$

Corollaire. — Dans le parallélogramme construit sur les paramètres OP , OP' (*fig. 2*), nommons (m, n) , (m', n') les coordonnées des Sommets P , P' . Le nombre des bandes contenues entre deux côtés opposés de ce parallélogramme sera égal, au signe près, à $mn' - nm'$.

PROBLÈME VIII. — *Trouver la condition pour que deux Rangées soient conjuguées.*

Soient m, n les coordonnées numériques d'un Sommet P (*fig. 2*); soient m', n' celles d'un autre Sommet p : on suppose m, n premiers entre eux; on suppose aussi m', n' premiers entre eux, et l'on demande la condition pour que OP et Op soient des Rangées conjuguées.

Le Sommet p doit appartenir à l'une ou à l'autre des deux Rangées limitrophes de OP : sans cela, les Rangées parallèles à OP et celles parallèles à Op se couperaient en des points qui ne seraient pas tous des Sommets du Réseau, et les Rangées OP , Op ne seraient pas conjuguées. Donc il faut qu'en posant

$$x = m', \quad y = n'$$

dans l'équation (10), celle-ci soit satisfaite; ce qui donne la condition

$$(14) \quad gm' + hn' = \pm 1,$$

et si l'on y substitue les valeurs de g, h , tirées des équations (6), en

remarquant que $D = 1$, cette condition se change en

$$(15) \quad nm' - mn' = \pm 1.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, le Sommet (m', n') appartiendra à l'une des Rangées limitrophes de OP, et sa ligne de jonction avec l'origine formera une Rangée conjuguée de la Rangée OP.

Si l'on substitue à m, n les caractéristiques g, h de la Rangée OP, à m', n' les caractéristiques g', h' de la rangée Op, on aura

$$(16) \quad hg' - gh' = \pm 1;$$

ce sera la condition pour que les Rangées désignées par les symboles (gh) , $(g'h')$ soient conjuguées et reproduisent les Sommets du Réseau par leurs intersections mutuelles.

PROBLÈME IX. — *Trouver la condition pour que trois Sommets (m, n) , (m', n') , (m'', n'') , appartiennent à des Rangées limitrophes.*

Transportons l'origine en (m'', n'') ; les coordonnées numériques des deux autres Sommets seront $(m - m'', n - n'')$, $(m' - m'', n' - n'')$.

Pour que les Rangées allant de la nouvelle origine à ces deux Sommets soient conjuguées, il faut que l'on ait

$$(n - n'')(m' - m'') - (m - m'')(n' - n'') = \pm 1,$$

c'est-à-dire, après réduction,

$$nm' - n'm + n''m - nm'' + n'm'' - m'n'' = \pm 1.$$

PROBLÈME X. — *Changer les axes coordonnés et exprimer les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes, et réciproquement.*

Soient (m, n) , (m', n') les coordonnées numériques des deux Sommets P et P' (fig. 3); m et n sont premiers entre eux, et il en est de même de m' et n' .

Soient pris OP, OP' pour nouveaux axes coordonnés, et soient X, Y les coordonnées numériques d'un Sommet M dans ce nouveau système.

Alors, si l'on mène Mm parallèle à OP' jusqu'à la rencontre de OP en m , et Mn parallèle à OP jusqu'à la rencontre de OP', on aura

$$Om = Mn = X \cdot OP,$$

$$On = Mm = Y \cdot OP'.$$

Les coordonnées numériques du point m dans l'ancien système d'axes conjugués OA, OB seront mX , nY ; celles du point n seront $m'Y$, $n'Y$.

Pour obtenir les coordonnées x , y du point M dans l'ancien système, on remarquera que, dans le passage de m à M, l'abscisse et l'ordonnée numériques éprouvent les mêmes accroissements que dans le passage de O à n , puisque On est égal et parallèle à Mm. Donc

$$(17) \quad \begin{cases} x = mX + m'Y, \\ y = nX + n'Y. \end{cases}$$

On en déduit, par l'élimination,

$$(18) \quad \begin{cases} X = \frac{n'}{n'm - m'n} x + \frac{m'}{m'n - n'm} y, \\ Y = \frac{n}{nm' - n'm} x + \frac{m}{mn' - nm'} y. \end{cases}$$

Si les Rangées OP, OP' sont conjuguées, ces équations se changent en

$$(19) \quad \begin{cases} \pm X = n'x - m'y, \\ \pm Y = -nx + my. \end{cases}$$

Faites tourner autour de O et d'un mouvement commun les axes des X et des Y, jusqu'à ce que le demi-axe des X positives et le demi-axe des x positives coïncident : si les demi-axes des Y positives et des y positives se trouvent alors situés du même côté par rapport aux axes coïncidents, le signe supérieur devra être préféré dans les premiers membres des équations (19). On adoptera le signe inférieur dans le cas contraire.

Corollaire. — Supposons que l'axe des y change seul, et soit remplacé par la Rangée OP conjuguée avec l'axe des x , lequel reste invariable; soit m_0 l'abscisse numérique du point P. On aura, dans ce changement d'axes,

$$\begin{aligned} m &= 1, & n &= 0, \\ m' &= m_0, & n' &= 1; \end{aligned}$$

on en conclura

$$\begin{aligned} x &= X + m_0 Y, \\ y &= Y, \end{aligned}$$

et, réciproquement,

$$Y = y, \quad X = x - m_0 y.$$

La coordonnée numérique parallèle à l'axe déplacé reste invariable.

PROBLÈME XI. — *On demande ce que devient le symbole d'une Rangée donnée (gh) , dans un nouveau système d'axes.*

Soient toujours (m, n) , (m', n') les coordonnées numériques des extrémités des nouveaux axes.

Si dans l'équation

$$gx + hy = C$$

on substitue les valeurs de x, y , tirées des équations (17), on aura

$$(gm + hn)X + (gm' + hn')Y = C;$$

d'où l'on voit que, si l'on représente par (GH) le nouveau symbole, on passera de (gh) à (GH) au moyen des formules

$$(20) \quad \begin{cases} G = gm + hn, \\ H = gm' + hn'. \end{cases}$$

Corollaire. — Si, conservant l'axe des x , on se borne à remplacer l'axe des y , et à prendre pour nouvel axe des y positives la Rangée allant de l'origine au Sommet $(-1, -1)$, Rangée qui est le prolongement en sens inverse de la diagonale du parallélogramme construit sur a et b , on aura

$$\begin{aligned} m &= 1, & n &= 0, \\ m' &= -1, & n' &= -1; \end{aligned}$$

ce qui changera le symbole (g, h) en $(g, -g - h)$.

Si l'on nomme alors i la caractéristique de la Rangée (gh) relative à ce nouvel axe, on aura l'équation

$$i = -g - h.$$

Soit c le paramètre du nouvel axe; le segment intercepté sur cet axe entre l'origine et la Rangée

$$gx + hy = 1,$$

devenue, dans le nouveau système,

$$gx + iY = 1,$$

aura évidemment pour valeur $\frac{c}{i}$.

D'où l'on voit que, « lorsque les paramètres a, b, c de trois Rangées conjuguées deux à deux sont disposés de manière à figurer trois forces qui se font équilibre sur le plan du Réseau, toute Rangée limitrophe à une Rangée passant par l'origine déterminera, dans les paramètres de ces Rangées, les trois segments $\frac{a}{g}, \frac{b}{h}, \frac{c}{i}$, g, h, i étant des nombres entiers positifs ou négatifs, assujettis à la relation

$$(21) \quad g + h + i = 0,$$

» et alors on pourra prendre indistinctement pour symbole de la Rangée (gh) , l'un ou l'autre des symboles $(gh), (gi), (ih)$. »

Notation à trois caractéristiques. — Lorsqu'on rapportera la position des Rangées du Réseau à trois axes coordonnés satisfaisant aux conditions que nous venons d'indiquer, on pourra remplacer le symbole (gh) par la notation à trois caractéristiques (ghi) .

La formule (9) prend une forme remarquable dans ce système de caractéristiques.

Soient (*fig. 5*)

$$OA = a, \quad OC = b, \quad OE = c, \quad AOC = \delta;$$

on aura

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \delta.$$

En substituant dans l'équation (9) la valeur de $2ab \cos \delta$ déduite de cette formule, et remarquant que l'on a

$$h^2 + gh = -hi, \quad g^2 + gh = -gi,$$

on trouvera, pour le carré du paramètre de la Rangée (ghi) ,

$$(22) \quad A^2 = -hia^2 - gib^2 - ghc^2 = -ghi \left(\frac{a^2}{g} + \frac{b^2}{h} + \frac{c^2}{i} \right).$$

THÉORÈME II. — *Si une Rangée OP (fig. 3) est contenue dans l'angle AOB*

formé par deux Rangées conjuguées OA, OB, toutes les Rangées conjuguées de OP seront contenues dans le même espace angulaire AOB.

Prenons OA pour demi-axe des x positives, OB pour demi-axe des y positives, et soient m, n les coordonnées numériques du Sommet P, positives et plus grandes que zéro.

Supposons maintenant que Op soit une rangée conjuguée de OP, et soient

$$m' = m_0, \quad n' = -n_0,$$

les coordonnées numériques du Sommet p ; m_0 et n_0 sont des nombres entiers et positifs. La condition générale prescrite par l'équation (15) deviendra

$$nm_0 + mn_0 = \pm 1.$$

Or il est impossible d'y satisfaire avec des valeurs positives et supérieures à zéro des nombres m, n, m_0, n_0 . Ainsi, la Rangée Op ne peut être conjuguée de OP.

Par la même raison, une Rangée telle que Oq (même figure) ne peut être conjuguée avec OP. Donc, etc.

THÉORÈME III. — *Le parallélogramme générateur du Réseau a une aire constante, de quelque manière qu'il soit construit.*

Je désignerai, désormais, par ω la surface du parallélogramme générateur d'un Réseau; soit OAmB (*fig. 2*) un tel parallélogramme.

Les Rangées OP et Op étant conjuguées, construisons sur OP, Op, le parallélogramme OPp ω , qui sera la maille de notre Réseau, déduit de ce système de Rangées; je dis que l'on a

$$\text{aire OP } p\omega = \text{aire OAmB} = \omega.$$

En effet, le parallélogramme OPp ω a même base que OAQP; mais la hauteur est différente, et l'on a [équation (11)]

$$\text{OP } p\omega : \text{OAQP} :: \text{Op}' : \text{OA} :: 1 : n,$$

n étant l'ordonnée numérique du Sommet P.

Mais, d'autre part,

$$\text{OAmB} : \text{OAQP} :: \text{OB} : \text{OB}'' :: 1 : n;$$

donc

$$\text{aire } OP \omega p = \text{aire } OAmB = \omega.$$

Deuxième démonstration. — Soient (m, n) les coordonnées numériques de P, (m', n') celles de p. On démontre, dans les Traités de Géométrie analytique, que le triangle joignant l'origine aux deux points dont les coordonnées linéaires sont (ξ, η) , (ξ', η') , a pour aire, si les axes coordonnés sont rectangulaires, la valeur absolue de l'expression

$$\frac{1}{2} (\eta \xi' - \xi \eta'),$$

et, si les axes sont obliques et forment entre eux un angle δ ,

$$\frac{1}{2} (\eta \xi' - \xi \eta') \sin \delta.$$

Ainsi, en posant

$$\text{angle } AOB = \delta,$$

on aura, au signe près,

$$\text{aire tri. } OPp = \frac{1}{2} \sin \delta (nbm'a - man'b) = \frac{1}{2} ab \sin \delta (nm' - mn');$$

donc, à cause de l'équation (15),

$$\text{aire tri. } OPp = \frac{1}{2} ab \sin \delta.$$

Donc

$$\text{aire } OP \omega p = ab \sin \delta = \text{aire } OAmB = \omega.$$

Troisième démonstration. — Nous conviendrons de nommer *densité du Réseau*, le nombre des Sommets contenus dans l'unité de surface, les dimensions de cette unité de surface étant supposées toutes les deux extrêmement grandes comparativement aux paramètres des Rangées que l'on considère.

Ceci posé, soient (*fig. 3*)

$$OP = a', \quad Op = b', \quad pOP = \delta', \quad \text{aire } OP \omega p = \omega';$$

on aura

$$\omega' = a' b' \sin \delta'.$$

Prenons sur la droite OP prolongée, et à partir de O, une longueur x très-grande relativement à a' , et à partir de O sur Op prolongée, une longueur y très-grande relativement à b' , de manière que le parallélogramme construit sur les deux longueurs x, y soit égal à l'unité de surface, et

qu'ainsi l'on ait

$$x_1 \sin \delta' = 1.$$

Le nombre de Sommets contenus dans ce parallélogramme se calculera comme le nombre des boulets de la base d'une pile rectangulaire, par la formule

$$\frac{x}{a'} \times \frac{1}{b'}.$$

On aura donc, ρ étant ce nombre, toujours très-grand,

$$\rho = \frac{x_1}{a' b'} = \frac{x_1 \sin \delta'}{a' b' \sin \delta'} = \frac{1}{\omega'};$$

or le nombre ρ , qui mesure la densité du Réseau, doit rester constant, quel que soit le système d'axes conjugués que l'on ait adopté pour sa détermination. On aura donc

$$(23) \quad \omega' = \omega = ab \sin \delta.$$

THÉORÈME IV. — *L'intervalle moyen des Sommets d'un Réseau est égal à la racine carrée de l'aire de son parallélogramme générateur.*

Poisson (*) a désigné par « intervalle moyen des molécules d'un corps » le côté d'un cube égal à l'unité de volume du corps divisée par le nombre des molécules que contient cette unité de volume. On peut appliquer cette définition au cas du plan, et nommer *intervalle moyen des Sommets d'un Réseau* le côté d'un carré égal à l'unité de surface divisée par le nombre des Sommets qu'elle renferme.

Soit ϵ cet intervalle moyen : en continuant à désigner par ρ le nombre des Sommets contenus dans l'unité de l'aire, on aura

$$\epsilon^2 = \frac{1}{\rho};$$

donc, d'après le théorème précédent,

$$(24) \quad \epsilon^2 = \omega, \quad \epsilon = \sqrt{\omega},$$

ω étant l'aire constante du parallélogramme générateur du Réseau.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 20^e cahier, page 5. — *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome XVIII, page 7.

PROBLÈME XII. — *Trouver la largeur d'une bande, dans le système de Rangées dont la notation symbolique est (gh).*

Soient Δ la largeur inconnue de la bande, A le paramètre des deux Rangées limitrophes qui l'embrassent : l'aire du parallélogramme générateur sera égale à ΔA . On aura donc

$$(25) \quad \Delta A = \omega.$$

Substituant les valeurs de A , ω , tirées des équations (9) et (20), on aura

$$\Delta = \frac{ab \sin \delta}{\sqrt{h^2 a^2 + g^2 b^2 + 2gh ab \cos \delta}},$$

ou, plus simplement,

$$(26) \quad \Delta = \frac{\sin \delta}{\sqrt{\frac{g^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + 2 \frac{gh}{ab} \cos \delta}}.$$

Définition. — Je désigne par *triangle élémentaire* tout triangle ayant pour sommets trois Sommets du Réseau appartenant à deux Rangées limitrophes.

Un tel triangle est toujours la moitié de l'un des parallélogrammes générateurs du Réseau.

On peut le considérer comme formant la *maille triangulaire* du Réseau.

Je désigne sous le nom de *triangle élémentaire principal*, ou, plus brièvement, sous le nom de *triangle principal*, celui qui a pour base le plus petit paramètre du Réseau, et dont les angles à la base sont aigus, l'un d'eux pouvant exceptionnellement devenir droit.

THÉORÈME V. — *Les triangles élémentaires ont une aire constante, égale à la moitié de l'aire du parallélogramme générateur. Le triangle ayant pour sommet l'origine et pour base la droite qui joint les Sommets (m, n), (m', n'), a pour aire le produit de l'aire du triangle élémentaire par la valeur absolue du facteur mn' — nm'.*

La première partie du théorème est évidente ; les aires des triangles élémentaires ont pour expression commune $\frac{1}{2} \omega$.

Soient maintenant P, P' (*fig. 2*) les Sommets à coordonnées numériques (m, n), (m', n') ; on aura, d'après la deuxième démonstration du théo-

rème III,

$$\text{aire tri. OPP}' = \frac{1}{2} ab \sin \delta (nm' - mn').$$

Or

$$ab \sin \delta = \omega;$$

donc

$$(27) \quad \text{aire tri. OPP}' = \frac{1}{2} \omega (nm' - mn').$$

Si l'on multiplie m et n par un facteur commun D , le premier membre et le second membre deviennent tous les deux D fois plus considérables, de sorte que l'équation (27) n'est pas troublée; elle ne l'est pas non plus dans le cas où l'on multiplierait m' et n' par un facteur D' . Donc cette équation a toujours lieu, lors même que m, n ou m', n' ne seraient pas premiers entre eux.

PROBLÈME XIII. — *Trouver le triangle principal d'un Réseau.*

Choisissez arbitrairement un Sommet O (*fig. 4*), et cherchez parmi tous les autres Sommets le plus rapproché de O .

Soit A ce Sommet, OA étant le paramètre minimum du Réseau. En O et A , élevez les droites Op, Am , perpendiculaires sur OA , et cherchez dans l'espace indéfini $pOAm$ le Sommet le plus rapproché de la droite OA . Vous le rencontrerez nécessairement en B , sur la Rangée limitrophe de OA . Joignez OB et BA ; OAB sera le triangle principal du Réseau.

THÉORÈME VI. — *Le triangle principal est le seul triangle élémentaire dont les trois angles soient aigus.*

En effet, soit OAB (*fig. 5*) le triangle principal. Menons la droite COF parallèle à BA ; les trois Rangées AOD, BOE, COF sont conjuguées deux à deux. Donc tout triangle élémentaire ayant son sommet en O sera contenu dans l'un des six espaces angulaires $AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA$ (théorème II). Soit $O\alpha\beta$ un tel triangle; la Rangée $O\gamma$ menée par O parallèlement à $\alpha\beta$, étant conjuguée de $O\alpha$ et de $O\beta$, devra être contenue dans le même espace angulaire AOB (théorème II). Si le triangle $O\alpha\beta$ avait ses trois angles aigus, l'espace angulaire embrassé par les trois demi-droites $O\alpha, O\beta, O\gamma$ devrait évaluer ou surpasser 90 degrés. Or cela n'est pas possible dans le cas actuel, puisque nous venons de démontrer que l'angle $\alpha O \gamma$ est nécessairement moindre que l'angle aigu ou droit AOB .

Donc, pour obtenir un triangle acutangle, il faut faire coïncider $O\alpha$ avec OA , $O\beta$ avec OB , et l'on retrouve ainsi le triangle principal.

Scolie. — Les six triangles qui composent l'hexagone $ABCDEF$ sont tous égaux et superposables; ils ne forment donc qu'une seule solution. On remarquera que ces triangles sont de deux sortes : les uns, savoir, OAB , DOC , EFO , tournent leur paramètre minimum vers le bas, et peuvent être amenés à coïncidence par une simple translation, sans rotation; les trois autres sont placés dans une situation inverse, et l'on ne peut les faire coïncider avec les précédents que par une rotation de 180 degrés autour d'une normale au plan.

Par exemple, DOC viendra coïncider avec DOE par une demi-rotation, effectuée dans son plan, autour du milieu O' de la base OD , commune aux deux triangles. Une demi-rotation autour de O amènerait DOC en coïncidence avec AOF .

Corollaire. — Le triangle principal n'ayant aucun de ses angles supérieurs à 90 degrés, on en conclura :

- 1°. Que son angle minimum est compris entre zéro et 60 degrés inclusivement;
- 2°. Que son angle moyen est compris entre 45 et 90 degrés inclusivement;
- 3°. Que son angle maximum est compris entre 60 et 90 degrés inclusivement.

THÉORÈME VII. — *Le triangle principal appartient à la bande de largeur maximum.*

En effet, de l'équation (25) on conclut

$$\Delta = \frac{\omega}{A}.$$

Or ω est constant pour tout le Réseau; donc Δ atteint son maximum, lorsque le paramètre atteint sa valeur minimum. Donc, si l'on prend le paramètre minimum pour base du triangle principal, et si on lui mène une parallèle par le sommet géométrique de ce triangle, la bande enfermée entre ces parallèles, et contenant le triangle principal, sera la bande de largeur maximum de tout le Réseau.

Scolie. — Cette valeur maximum de Δ ne peut être inférieure à $a\sqrt{\frac{3}{4}}$.

si l'on désigne par a le paramètre minimum du Réseau. En effet, dans la *fig. 4*, décrivez de O , comme centre, le quart de cercle ANP ; de A , comme centre, le quart de cercle ONM . Le sommet B du triangle principal sera compris dans l'espace indéfini $pPNMm$. La hauteur Δ de ce triangle sera la plus petite possible, lorsque B coïncidera avec N . Donc, nommant Δ_0 la largeur maximum des bandes du Réseau, on aura

$$\Delta_0 > \text{ou} = a \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

THÉORÈME VIII. — *Le triangle principal contient les trois plus petits paramètres de tout le Réseau.*

Soient OA (*fig. 5*) le paramètre minimum, et OB le plus petit des deux autres côtés du triangle principal; soient OAB , OBC les deux triangles principaux construits sur OB . La ligne Oi , normale à OA , passera entre les Sommets B et C . Pour un Sommet quelconque α appartenant à la Rangée BC prolongée, on aura évidemment

$$i\alpha > iB, \quad i\alpha > iC;$$

donc

$$O\alpha > OB, \quad O\alpha > OC, \text{ c'est-à-dire } AB.$$

Si le point α appartenait à la Rangée limitrophe de BC , à celle qui coupe la normale Oii' à la distance $Oi' = 2Oi$, on aurait

$$O\alpha > Oi';$$

or on a d'ailleurs

$$Oi' = 2Oi = 2AB \times \sin OAB.$$

Mais, de plus, en vertu du corollaire du théorème VI, OAB étant l'angle moyen,

$$OAB > \text{ou} = 45^\circ, \quad 2 \sin OAB > \text{ou} = \sqrt{2};$$

donc

$$O\alpha > AB \sqrt{2}.$$

Ainsi, dans tous les cas, le paramètre $O\alpha$ surpassera le paramètre AB , lequel est, par hypothèse, le plus grand côté du triangle principal.

Scolie. — Il est bien entendu que l'on peut avoir exceptionnellement

$$OB = OA, \quad \text{et même} \quad OC = OB = OA.$$

On peut aussi avoir exceptionnellement $O\alpha = OC$, mais seulement dans le cas où le triangle BOA serait rectangle en O.

Corollaire. — Le triangle principal est le triangle de périmètre minimum parmi tous les triangles élémentaires du Réseau.

THÉORÈME IX. — *Un point quelconque étant pris dans l'intérieur d'un triangle principal, l'un des trois sommets de ce triangle sera toujours plus rapproché de ce point que tout autre Sommet du Réseau.*

On démontrerait ce théorème en décrivant sur OA, OB, BA (*fig. 5*), comme diamètres, des demi-circonférences extérieures au triangle BOA, et remarquant que ces trois demi-cercles ne peuvent contenir aucun Sommet.

§ III. — DES RÉSEAUX SYMÉTRIQUES.

Définitions. — Toute droite qui partage un Réseau en deux moitiés symétriques, c'est-à-dire susceptibles d'être amenées à coïncidence, Sommet sur Sommet, par une demi-rotation de l'une de ces moitiés autour de la droite, sera dite *axe de symétrie du Réseau*. Les Sommets, ainsi amenés à coïncidence, seront dits *homologues* par rapport à l'axe de symétrie. Nous verrons bientôt que ces axes peuvent toujours être considérés comme étant des Rangées. Le Réseau qui possède un ou plusieurs axes de symétrie sera dit *Réseau symétrique*; il sera dit *asymétrique*, dans le cas contraire.

Lorsque le Réseau possède plusieurs axes de symétrie, ces axes peuvent être de même espèce ou d'espèces différentes.

Deux axes de symétrie sont dits de même espèce, lorsque la configuration du Réseau est la même autour de chacun d'eux, ce qui exige, comme première condition, qu'ils aient le même paramètre. Alors, si on lie par la pensée les Sommets du Réseau à chacun de ces axes, par exemple, au moyen de normales abaissées sur ces axes, de manière à figurer deux Réseaux égaux, superposés Sommet sur Sommet, et si l'un de ces systèmes est supposé mobile, il faudra, pour que les axes soient de même espèce, que l'on puisse, par des mouvements convenables du Réseau mobile, faire coïncider en même temps l'axe mobile avec l'axe fixe, les Sommets mobiles avec les Sommets fixes.

Deux axes de symétrie sont d'espèces différentes lorsque la configuration du Réseau n'est pas la même autour de chacun d'eux.

THÉORÈME X. — *A tout axe de symétrie ne contenant aucun Sommet du Réseau, correspondent d'autres axes parallèles et passant par des Sommets; le triangle principal est alors rectangle.*

Soit GH un tel axe de symétrie (*fig. 6*); soient A un Sommet, et A' le Sommet homologue de A, sur une ligne normale à GH. Joignons A, A', et choisissons sur la Rangée AA' les deux Sommets les plus rapprochés de l'axe GH, l'un d'un côté et l'autre de l'autre. Supposons que les Sommets A, A' satisfassent à cette condition, et menons AB, A'B' parallèles à GH.

Soit maintenant BB' la Rangée limitrophe de la Rangée AA': son paramètre sera nécessairement égal à AA'; ses points d'intersection avec les droites AB, A'B' seront des Sommets du Réseau; car, si un Sommet tombait entre B et B', il serait à une distance de son homologue moindre que le paramètre AA', ce qui ne saurait être. Donc AB, A'B' seront des Rangées de paramètre $AB = A'B'$, et conjuguées avec AA', BB'. Ces Rangées sont évidemment des axes de symétrie. Le triangle principal est alors A'AB, ou A'B'B; il est rectangle.

Corollaire. — On peut remplacer l'axe GH par les axes de symétrie AB, A'B' qui lui sont parallèles, ou par une Rangée quelconque parallèle à AB qui, elle aussi, sera évidemment un axe de symétrie.

On dit alors que le Réseau possède un axe de symétrie parallèle à AB. On doit entendre par là que toutes les Rangées parallèles à AB sont de tels axes.

Après avoir trouvé un système d'axes de symétrie parallèles, et passant par des Sommets, on pourra se demander s'il n'existerait pas des axes parallèles aux précédents, et ne contenant aucun Sommet. Je désigne ces derniers sous le nom d'*axes intermédiaires*: mais, comme, lorsque de tels axes se rencontrent, ils n'introduisent aucune notion nouvelle dans l'étude des Réseaux, je m'abstiendrai de les considérer, et je supposerai désormais que tout axe de symétrie passe par un Sommet.

THÉORÈME XI. — *Tout axe de symétrie passant par un Sommet est une des Rangées du Réseau.*

Soit GOH (*fig. 7*) l'axe passant par le Sommet O, et soit A un autre Sommet en dehors de l'axe; le point A a son homologue en A', en vertu de la

symétrie dont jouit l'axe GOH : mais, d'autre part, en vertu de la symétrie générale de tout Réseau, A' a un Sommet correspondant en A'' de l'autre côté de O par rapport à A'. Donc la droite AA'' est une Rangée ; mais elle est parallèle à GOH : donc GOH est aussi une Rangée du Réseau.

THÉORÈME XII. — *A tout axe de symétrie correspond un second axe de symétrie qui lui est perpendiculaire, et le coupe sur un Sommet.*

Si l'on mène (*fig. 7*) la droite IOK, passant par le Sommet O et normale à GOH, elle sera perpendiculaire sur le milieu de AA'' : donc, à tout Sommet A correspond un autre Sommet A'', qui est son homologue par rapport à IOK ; donc IOK est aussi un axe de symétrie du Réseau.

THÉORÈME XIII. — *A tout axe de symétrie correspondent une infinité d'autres axes de symétrie qui lui sont parallèles et passent par tous les Sommets du Réseau.*

C'est un résultat des lois générales de la distribution régulière des Sommets dans un Réseau quelconque.

La symétrie du Réseau, suivant une direction déterminée, n'est jamais caractérisée par un axe unique, mais bien par un système d'axes parallèles, formant un système complet de Rangées parallèles entre elles, embrassant tous les Sommets du Réseau.

THÉORÈME XIV. — *Tout Réseau pourvu d'un axe de symétrie a pour triangle principal un triangle rectangle ou un triangle isocèle.*

En effet, soit OM (*fig. 8*) l'axe de symétrie passant par deux Sommets voisins O, M ; soit O'M' la droite sur laquelle est située la Rangée limitrophe de OM. Le segment O'M', intercepté entre les perpendiculaires OO', MM', doit contenir un des Sommets du Réseau.

Soit donc N ce Sommet ayant son homologue en N'. Si l'on fait

$$M'N'' = O'N = O''N',$$

la droite MN'' sera égale et parallèle à ON' : ainsi N'' sera l'un des Sommets du Réseau (théorème I). Or il ne peut exister deux Sommets distincts N, N'' entre O' et M'. Il faut donc que l'une des deux choses suivantes ait lieu : 1° ou que l'on ait $NN'' = O'M'$, auquel cas N tombe en O' et N'' en M' ;

2° ou que l'on ait $NN'' = 0$. Dans le premier cas, le triangle principal sera $O'OM$ ou OMM' , c'est-à-dire rectangle. Dans le second cas, N coïncide avec le milieu P de $O'M'$; le triangle OPM est isocèle, et, de plus, si $POM > 45$ degrés, il est le triangle principal du Réseau: mais si l'on a $POM < 45$ degrés, P' étant le Sommet homologue du Sommet P , le triangle POP' sera le triangle principal (théorème VI); il sera pareillement isocèle.

Corollaire I. — Tout Réseau dont le triangle principal est scalène est asymétrique.

Corollaire II. — Tout Réseau symétrique a pour parallélogramme générateur un rectangle ou un rhombe: le rectangle $OO'M'M$ (*fig. 8*), si le triangle principal est $OO'M$; le rhombe $OPMP'$, si le triangle principal est OPP' ou OPM .

THÉORÈME XV. — *Réciproquement, si le triangle principal est rectangle, le Réseau possède deux axes de symétrie parallèles aux petits côtés du triangle; si le triangle principal est isocèle, le Réseau possède deux axes de symétrie, l'un parallèle et l'autre perpendiculaire à la base.*

Le Réseau à maille rectangulaire a pour axes les côtés du rectangle; il existe, dans ce cas, des axes de symétrie intermédiaires, parallèles aux précédents, et passant par les centres des rectangles générateurs. Le Réseau à maille rhombe a pour axes les diagonales du rhombe.

Définition. — *Centrer un Réseau, centrer les mailles d'un Réseau, c'est ajouter de nouveaux Sommets au centre de chacun des parallélogrammes générateurs du Réseau.*

THÉORÈME XVI. — *Si l'on centre tous les rectangles d'un Réseau à maille rectangulaire, on forme un Réseau à maille rhombe; si l'on centre tous les rhombes d'un Réseau à maille rhombe, le Réseau devient rectangulaire.*

Cette proposition est évidente; il importe de remarquer que ces changements n'altèrent pas les axes de symétrie du système.

THÉORÈME XVII. — *Les mêmes systèmes de Rangées se rencontrent dans le Réseau à rhombes centrés et dans le Réseau à rhombes non centrés;*

il en est de même pour les Réseaux à mailles rectangulaires centrées ou non centrées.

Soit $abc\dots, ABC\dots$ (*fig. 9*) un Réseau rhombique à maille $AaBa'$, et considérons le système des Rangées parallèles à l'une des diagonales du rhombe, par exemple à AB . Si l'on prend cette diagonale pour axe des x , une quelconque des Rangées parallèles à cet axe sera caractérisée par l'équation numérique

$$\gamma = n,$$

où n est un nombre entier quelconque.

Le Réseau rhombique se change dans le Réseau rectangulaire à maille $ABA'B'$, si l'on supprime toutes les Rangées représentées par l'équation

$$\gamma = 2j + 1,$$

j étant un nombre entier quelconque. Cette suppression fait disparaître tous les Sommets à ordonnée numérique impaire.

La Rangée qui réunit deux Sommets à ordonnées paires $2j$ et $2j'$ existe évidemment, et dans le Réseau primitif et dans le Réseau dédoublé. Si l'on joint un Sommet à ordonnée paire $2j$ avec un Sommet à ordonnée $2j' + 1$, la Rangée ainsi obtenue, prolongée au delà de ce dernier Sommet d'une quantité égale à l'intervalle des deux Sommets donnés, aboutira à un troisième Sommet ayant une ordonnée égale à $4j' + 2 - 2j$, paire par conséquent; cette Rangée appartiendra donc au Réseau dédoublé, mais son paramètre y sera deux fois plus grand que dans le Réseau primitif.

Enfin, si l'on réunit deux Sommets d'ordonnées impaires $2j + 1$ et $2j' + 1$, la Rangée ainsi obtenue n'existe pas, il est vrai, dans le Réseau dédoublé; mais, si on lui mène une parallèle par le Sommet servant d'origine, l'extrémité du paramètre aboutira à un Sommet ayant pour ordonnée $\pm (2j' - 2j)$, et qui fait partie des Rangées du Réseau dédoublé.

Donc le dédoublement du Réseau n'a fait disparaître aucun système de Rangées.

On prouverait de même que si, dans le Réseau à maille rectangulaire $a'b'A'$ (*fig. 10*), on supprime, dans le système des Rangées parallèles aux diagonales $a'b'$, AB , toutes les Rangées d'ordre impair, telles que abc ,

$a'b'c'd', \dots$, le Réseau à maille rhombe $ABA'B'$, provenant de cette soustraction, offrira les mêmes systèmes de Rangées que le Réseau primitif, sauf des altérations nécessaires dans les paramètres de ces Rangées, ou dans les intervalles qui les séparent.

THÉORÈME XVIII. — *Si le triangle principal d'un Réseau est à la fois rectangle et isocèle, le Réseau aura quatre systèmes d'axes : deux systèmes, rectangulaires entre eux et de même espèce, auront pour paramètres les côtés du carré générateur; deux autres systèmes d'une autre espèce que les précédents seront pareillement rectangulaires entre eux; ils auront pour paramètres les diagonales du carré générateur et couperont les axes précédents sous des angles de 45 degrés.*

C'est une conséquence évidente du théorème XV.

THÉORÈME XIX. — *Si le triangle principal est équilatéral, le Réseau possédera six systèmes d'axes : trois systèmes d'une première espèce seront dirigés suivant les côtés du triangle principal; trois autres systèmes pareils entre eux, mais d'une autre espèce que les précédents, seront perpendiculaires aux côtés du triangle principal.*

C'est encore une conséquence du théorème XV. La *fig. 11* représente la disposition des axes; les lignes pleines correspondent aux axes de la première espèce; les lignes pointillées aux axes de la deuxième espèce.

Classification des Réseaux symétriques.

Au point de vue de leur symétrie, on peut distinguer quatre classes distinctes de Réseaux :

Première classe. — Réseaux à six axes de symétrie, trois d'une espèce et trois d'une autre espèce. Cette classe n'offre qu'un seul mode; le Réseau à maille triéquiangle ayant pour parallélogramme générateur un rhombe à angles de 60 et 120 degrés (voyez théorème XIX).

Deuxième classe. — Réseaux à quatre axes de symétrie, deux d'une espèce et deux d'une autre espèce. Cette classe n'offre qu'un seul mode; le Réseau à maille carrée (voyez théorème XVIII).

Troisième classe. — Réseaux à deux axes de symétrie. Cette classe offre deux modes distincts : le Réseau à maille rhombe, ou rectangle centrée; le

Réseau à maille rectangulaire, ou rhombe centrée (théorèmes XV et XVI). Les deux axes sont rectangulaires entre eux et d'espèces différentes.

Quatrième classe. — Réseaux asymétriques; la maille est un parallélogramme à côtés inégaux, et dont les angles diffèrent de 90 degrés.

Des Rangées de même espèce dans les Réseaux symétriques.

Définition. — Nous supposons, comme à la page 26, que, dans le Réseau donné, existent deux Réseaux égaux, superposés. Sommets sur Sommets, de manière à figurer un Réseau unique. L'un des deux Réseaux sera considéré comme invariable de position; mais l'autre pourra se mouvoir tout d'une pièce, soit par translation, soit par rotation.

Ceci posé, si, étant donnée une Rangée du Réseau mobile coïncidant avec la Rangée fixe $abc...$ avant tout déplacement, on peut, par des mouvements convenables du Réseau mobile, faire coïncider cette Rangée avec la Rangée fixe $ABC...$, la coïncidence des deux Réseaux, Sommets à Sommets, ayant lieu simultanément, on dira que les Rangées $abc...$ et $ABC...$ sont de même espèce.

THÉORÈME XX. — *Deux Rangées parallèles peuvent toujours être considérées comme étant de même espèce.*

Car, en donnant au Réseau mobile un mouvement convenable de translation, sans rotation, on pourra toujours amener la coïncidence désirée.

THÉORÈME XXI. — *Deux Rangées sont de même espèce, si elles ont le même paramètre, et si sur ces paramètres, comme bases, on peut construire deux triangles élémentaires égaux entre eux.*

On peut toujours, par simple translation, faire coïncider un Sommet de la Rangée mobile avec un Sommet de la Rangée fixe. Soit donc O (*fig. 12*) le Sommet commun; soit OA la Rangée mobile sur le paramètre OA de laquelle on a construit le triangle élémentaire OAa ; soit OA' la Rangée fixe sur le paramètre OA' de laquelle on a construit le triangle élémentaire $OA'a'$. On a, par hypothèse, $OA = OA'$. Il est permis de supposer que l'on a $Oa = Oa'$; car, si l'on avait $Oa' = aA$, l'un des triangles élémentaires pourrait être construit du côté opposé du paramètre qui lui sert de base, et la relation $Oa = Oa'$ serait alors satisfaite.

Si maintenant nous faisons tourner le Réseau mobile, d'une quantité angulaire égale à AOA' , autour d'un axe de rotation passant par O et normal au plan du Réseau, les deux triangles élémentaires coïncideront, et la superposition des deux Réseaux sera complète.

Dans le cas où les deux triangles élémentaires seraient inversement disposés, comme le sont OaA et $Oa'''A'''$, on ne pourrait obtenir la coïncidence par rotation autour de la normale au plan; mais, alors, on y parviendra en faisant tourner le Réseau mobile de 180 degrés autour de la droite OO' , bissectrice de l'angle AOA''' . Donc, dans ce cas encore, les deux Rangées seront de même espèce.

Scolie. — La bissectrice de l'angle formé par deux Rangées à triangles élémentaires égaux, mais inversement disposés, est un axe de symétrie du Réseau.

Définition. — Les Rangées OA , OA' (*fig. 12*), dont les triangles élémentaires peuvent être amenés à coïncidence par rotation autour de la normale passant par O , seront dites *directement semblables*. Les Rangées OA , OA''' , dont les triangles élémentaires sont inversement disposés, seront dites *inversement semblables*.

Lorsque les deux triangles élémentaires, construits sur les paramètres comme bases, sont isocèles, les Rangées sont en même temps directement semblables et inversement semblables.

THÉORÈME XXII. — *Deux Rangées homologues par rapport à l'un des axes de symétrie du Réseau sont de même espèce et inversement semblables.*

La similitude inverse est alors un résultat de la symétrie.

THÉORÈME XXIII. — *S'il existe deux ou plusieurs Rangées de même espèce, et directement semblables, partant d'un même Sommet, le système complet de ces Rangées divise en parties égales l'espace environnant ce Sommet.*

Parmi les Rangées directement semblables à OA (*fig. 12*), il est permis de considérer celle qui fait avec OA l'angle minimum. Soit OA' cette Rangée. Faisons tourner le Réseau mobile autour de la normale passant par O , jusqu'à ce que la Rangée mobile OA vienne coïncider avec la Rangée fixe OA' . Dans ce mouvement, la Rangée mobile OA' arrivera en OA'' , qui

devra être l'une des Rangées du Réseau fixe, et l'on trouvera ainsi

$$A'OA'' = AOA'.$$

Une rotation angulaire de même amplitude que la précédente, et dans le même sens, amènera la Rangée mobile OA en OA''; en continuant de la sorte, OA finira par coïncider avec O α , prolongement de OA, après une rotation totale de 180 degrés. Toutes les Rangées OA, OA', OA'', ..., ainsi obtenues, seront directement semblables, et si l'on désigne par q le nombre total de ces Rangées, on aura

$$AOA' = \frac{180^\circ}{q}.$$

THÉORÈME XXIV. — *Le nombre total des Rangées de même espèce et directement semblables dans un Réseau ne peut être supérieur à trois.*

Soit q le nombre total des Rangées directement semblables; soit O (*fig. 13*) leur Sommet commun, et soit OM le paramètre minimum du Réseau. Faites tourner OM autour de O d'un angle égal à $\frac{180^\circ}{q}$: on sait (théorème précédent) que, dans ce mouvement, le Réseau mobile revient coïncider avec le Réseau fixe.

Soit donc $MOM' = \frac{180^\circ}{q}$; M' sera l'un des Sommets du Réseau. Décrivez un cercle de centre O et de rayon OM, et faites arc M''M' = arc M'M, arc M'''M'' = arc M''M', etc.: les points M, M', M'' appartiendront tous au Réseau, et les cordes MM', M'M'' seront les côtés d'un polygone régulier inscrit, à nombre de côtés égal à $2q$.

Ce polygone ne peut être qu'un carré ou un hexagone. En effet, achevons le losange MM'M''m: on aura évidemment angle M'Mm = angle M'OM; ainsi les triangles M'OM, M'Mm seront isocèles et semblables, et l'on aura

$$M'm = \frac{M'M}{OM}.$$

Donc, si $M'M < OM$, on aura, à fortiori, $M'm < OM$; m étant un Sommet du Réseau, OM ne serait plus le paramètre minimum. Or, pour tout polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés supérieur à six, le côté est infé-

rieur au rayon. Donc le polygone $MM'M''$... sera un carré ou un hexagone, et le nombre q sera égal à 2 ou à 3. Si $q = 2$, le Réseau sera à maille carrée; si $q = 3$, le Réseau sera à maille triéquiangle.

Corollaire. — L'angle formé par deux Rangées directement semblables ne peut être égal qu'à 60 ou à 90 degrés.

THÉORÈME XXV. — *Il ne peut y avoir de Rangées de même espèce, et directement semblables, que dans les Réseaux à maille carrée ou triéquiangle.*

Ce théorème est une conséquence du corollaire précédent. Les deux suivants, qui n'exigent aucune démonstration, en sont les réciproques.

THÉORÈME XXVI. — *Dans tout Réseau à maille carrée, tournant dans son plan autour d'un de ses Sommets, le lieu des Sommets redevient le même à chaque quart de tour, et à tout système de Rangées correspond un autre système de Rangées de même espèce et directement semblables, qui lui est perpendiculaire.*

THÉORÈME XXVII. — *Dans tout Réseau à maille triéquiangle, tournant autour d'un de ses Sommets, le lieu des Sommets redevient le même à chaque sixième de tour, et à tout système de Rangées correspondent deux autres systèmes de Rangées de même espèce et directement semblables, inclinés de 60 degrés sur le système donné.*

Définitions. — Lorsqu'un Réseau, tournant autour d'une droite normale à son plan, recouvre les positions de ses Sommets à chaque quart de tour, cette droite sera dite un *axe de symétrie quaternaire du Réseau*. Lorsque le lieu des Sommets redevient le même à chaque sixième de tour, l'axe de rotation est un *axe de symétrie sénaire*. Ces axes, lorsqu'ils existent, constituent un système de droites parallèles passant par chaque Sommet.

La symétrie quaternaire caractérise le Réseau à maille carrée; la symétrie sénaire, le Réseau à maille triéquiangle.

Les fig. 14, 15 et 16 représentent le mode de disposition des Rangées de même espèce (soit directement, soit inversement semblables), autour d'un même Sommet O, pour ces diverses classes de Réseaux. Les lignes pleines sont les axes de symétrie; les traits de longueur inégale indiquent les axes de différentes espèces; les lignes pointillées sont les Rangées dont l'espèce

est la même que celle d'une Rangée de paramètre donné. La *fig. 14* se rapporte aux Réseaux de la première classe, à maille triéquiangle; la *fig. 15*, aux Réseaux de la deuxième classe, ou à maille carrée; la *fig. 16*, aux Réseaux de la troisième classe, à maille rhombe ou rectangulaire.

THÉORÈME XXVIII. — *Il ne peut y avoir de Rangées de même espèce et de directions différentes dans un Réseau asymétrique.*

Cela est évident pour les Rangées inversement semblables (voyez le corollaire du théorème XXI). Cela n'est pas moins évident pour des Rangées directement semblables, en vertu du théorème XXV.

THÉORÈME XXIX. — *Deux axes de symétrie de même espèce sont des Rangées de même espèce pour le Réseau.*

Ces axes sont des Rangées du Réseau (théorèmes X et XI), et puisque la coïncidence de deux tels axes entraîne celle du Réseau fixe avec le Réseau mobile, ces Rangées sont de même espèce (définition de la page 32).

Définition. — On peut définir *angles de même espèce* dans un Réseau deux angles égaux compris entre des Rangées de même espèce deux à deux.

§ IV. — DES ASSEMBLAGES EN GÉNÉRAL.

Nous considérerons l'Assemblage de la *fig. 1*, dont le Sommet O est pris pour origine des coordonnées, et qui est construit au moyen des trois Rangées OAA'A"... , OBB'B"... , ODD'D"... . Nous désignerons par a , b , d les paramètres de ces Rangées, savoir,

$$(28) \quad OA = a, \quad OB = b, \quad OD = d;$$

ξ , η , ζ seront les coordonnées linéaires des points de l'espace rapportés aux axes obliques OA, OB, OD; m , n , p représenteront des coordonnées numériques de Sommets définis; x , y , z seront des coordonnées numériques mobiles, appartenant à des Sommets indéterminés, de sorte que l'on aura, suivant les cas,

$$(29) \quad \frac{\xi}{a} = m, \quad \frac{\eta}{b} = n, \quad \frac{\zeta}{d} = p,$$

$$(30) \quad \frac{\xi}{a} = x, \quad \frac{\eta}{b} = y, \quad \frac{\zeta}{d} = z.$$

On remarquera que l'Assemblage entier peut être considéré comme une surface à nappes distinctes et fermées, venant s'évanouir chacune en un des Sommets de l'Assemblage.

L'équation de cette surface peut s'écrire sous la forme

$$\sin^2 \frac{\xi}{a} \pi + \sin^2 \frac{\eta}{b} \pi + \sin^2 \frac{\zeta}{d} \pi = 0.$$

PROBLÈME XIV. — *Trouver l'équation d'une Rangée passant par l'origine et par un Sommet donné T (fig. 20).*

Soient m, n, p les coordonnées numériques de T ; l'équation de OT en coordonnées linéaires et courantes sera

$$\frac{\xi}{ma} = \frac{\eta}{nb} = \frac{\zeta}{pd};$$

en coordonnées numériques, on aura

$$(31) \quad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}.$$

Si m, n, p avaient un plus grand commun diviseur D, le Sommet $\left(\frac{m}{D}, \frac{n}{D}, \frac{p}{D}\right)$ appartiendrait à la Rangée OT, et serait, parmi tous les Sommets de la Rangée, le plus rapproché du Sommet O. Si m, n, p n'ont d'autre diviseur commun que l'unité, OT est le paramètre de la Rangée.

Je supposerai, dorénavant, que les Sommets que nous aurons l'occasion de joindre par une droite avec l'origine satisfont à cette condition, que leurs trois coordonnées numériques n'aient d'autre diviseur commun que l'unité.

Notation. — La Rangée allant de l'origine au Sommet (m, n, p) , m, n et p n'ayant aucun diviseur commun, sera désignée, dorénavant, par le symbole mnp .

THÉORÈME XXX. — *Soient T, T' deux Sommets d'un Assemblage (fig. 20); si, par un troisième Sommet O, on mène la droite Ot égale et parallèle à TT', l'extrémité de cette droite sera un quatrième Sommet de l'Assemblage.*

Ce théorème se démontrerait comme le théorème I.

PROBLÈME XV. — *Trouver l'équation générale des Rangées parallèles à la Rangée OT (fig. 20), dont le symbole est mnp.*

Soient m', n', p' les coordonnées d'un second Sommet T' pris arbitrairement : la Rangée menée par ce Sommet, parallèlement à OT, aura pour équation, en coordonnées numériques,

$$(32) \quad \frac{x-m'}{m} = \frac{y-n'}{n} = \frac{z-p'}{p}.$$

PROBLÈME XVI. — *Trouver le paramètre de la Rangée OT et de ses parallèles (fig. 20).*

Soient α, β, δ les angles que forment entre eux les trois demi-axes des coordonnées positives sur le plan des yz , sur le plan des xz et sur le plan des xy .

Convenons de désigner par $Pmnp$ le paramètre de la Rangée OT allant de l'origine au Sommet (m, n, p) : on aura, par une formule connue, pour la valeur du carré de ce paramètre,

$$(33) \quad \begin{cases} P^2 mnp = m^2 a^2 + n^2 b^2 + p^2 d^2 \\ \quad + 2 mnab \cos \delta + 2 mpad \cos \beta + 2 npbd \cos \alpha. \end{cases}$$

On pourrait, dans cette formule, remplacer a par P_{100} , b par P_{010} , d par P_{001} .

PROBLÈME XVII. — *Trouver l'équation du plan réticulaire passant par l'origine O et par les deux Sommets T et T' (fig. 20).*

Les formules de la Géométrie analytique donnent

$$\xi(nbp'd' - pdn'b) + \eta(pdm'a - map'd) + \zeta(man'b - nbm'a) = 0;$$

et, divisant par abd ,

$$(34) \quad x(np' - pn') + y(pm' - mp') + z(mn' - nm') = 0.$$

Soit maintenant D le plus grand commun diviseur des binômes $np' - pn'$, $pm' - mp'$, $mn' - nm'$: posons

$$(35) \quad \frac{np' - pn'}{D} = g, \quad \frac{pm' - mp'}{D} = h, \quad \frac{mn' - nm'}{D} = k;$$

il viendra

$$(36) \quad gx + hy + kz = 0.$$

Notation, définition. — Nous adopterons la notation symbolique (ghk) pour représenter l'ensemble des plans réticulaires parallèles au plan OTT' : les nombres entiers g, h, k , positifs ou négatifs, seront les *caractéristiques* de ce système de plans réticulaires par rapport aux axes des x , des y et des z . Dans le cas où ce symbole (ghk) offrirait de l'ambiguïté, on le remplacerait par (g, h, k) . Si l'une des trois caractéristiques, k par exemple, prenait le signe $-$, on le placerait au-dessus de cette caractéristique, ce qui changerait (ghk) en $(gh\bar{k})$.

De ces conventions il résulte que le symbole du plan des xy sera (001) , celui du plan des xz (010) , celui du plan des yz (100) .

THÉORÈME XXXI. — *La trace d'un plan réticulaire quelconque passant par l'origine, tel que OTT' (fig. 20), sur l'un des trois plans coordonnés, est une Rangée commune aux Réseaux de ces deux plans.*

Les équations de cette trace sur le plan des xy sont

$$z = 0, \quad gx + hy = 0.$$

La seconde de ces équations est satisfaite par $x = g, y = -h$: donc cette trace est une Rangée. Si g et h ne sont pas premiers entre eux, il existe d'autres Sommets entre l'origine et le point $x = h, y = -g$. Soit, en général, D le plus grand commun diviseur de g, h ; la trace du plan (ghk) sur le plan des xy sera une Rangée de symbole $\left(\frac{g}{D} \frac{h}{D}\right)$.

Corollaire I. — L'intersection de deux plans réticulaires quelconques sera une Rangée commune aux Réseaux des deux plans, pourvu qu'elle contienne un Sommet ; car l'on peut toujours prendre l'un des deux plans pour plan des xy (problème I), et le Sommet commun pour origine.

Corollaire II. — Si cette intersection ne passe par aucun des Sommets de l'Assemblage, elle est du moins parallèle à un certain système de Rangées. Pour obtenir ces dernières, on mènera par un Sommet arbitrairement choisi deux plans réticulaires parallèles aux plans donnés ; leur intersection fera connaître une des Rangées de ce système.

PROBLÈME XVIII. — *Trouver l'équation générale des plans réticulaires parallèles au plan OTT' (fig. 20), et dont le symbole est (ghk).*

Par le Sommet (m'', n'', p'') menons un plan parallèle à OTT'; son équation sera

$$gx + hy + kz = gm'' + hn'' + kp'',$$

ou

$$(37) \quad gx + hy + kz = C,$$

en désignant le dernier membre par C : C est nécessairement un nombre entier. Cette équation, aussi générale que possible, embrasse tout le système des plans réticulaires parallèles à OTT'.

PROBLÈME XIX. — *Trouver l'équation des plans réticulaires limitrophes du plan OTT' (fig. 20).*

On sait, par la théorie des fractions continues, que si g, h, k n'ont d'autre diviseur commun que l'unité, il sera toujours possible de satisfaire à la double équation

$$(38) \quad gx + hy + kz = \pm 1,$$

par des valeurs entières de x, y, z .

Les deux plans réticulaires fournis par cette équation sont les limitrophes du plan OTT'; car, pour tout autre plan dont l'équation serait

$$gx + hy + kz = C,$$

les intersections avec les axes des x , des y et des z auraient lieu à des distances de l'origine plus considérables que pour les plans de l'équation (38).

On pourrait aussi démontrer ce théorème sans recourir à la théorie des fractions continues.

PROBLÈME XX. — *Dans un système de plans réticulaires dont la notation symbolique est (ghk), on demande quel nombre de strates de ce système est compris entre le Sommet à coordonnées M, N, P et le Sommet à coordonnées M', N', P'.*

Concevons que le plan réticulaire

$$gx + hy + kz = 1$$

reçoive l'unité pour numéro d'ordre, que le plan suivant reçoive le

n° 2, etc.; le plan

$$gx + hy + kz = C$$

aura le numéro d'ordre C.

Soient maintenant C et C' les numéros d'ordre des plans réticulaires passant par les Sommets (M, N, P) et (M', N', P') : on aura

$$C = gM + hN + kP, \quad C' = gM' + hN' + kP'.$$

Ainsi le nombre des strates interceptées entre les deux Sommets donnés aura pour valeur, au signe près,

$$g(M - M') + h(N - N') + k(P - P').$$

PROBLÈME XXI. — *Trouver la condition pour qu'un plan réticulaire de symbole (ghk), passant par l'origine, soit conjugué à une Rangée allant de l'origine au Sommet (m'', n'', p'').*

Il faut évidemment que le Sommet (m'', n'', p'') soit situé sur l'un des deux plans réticulaires limitrophes du plan

$$gx + hy + kz = 0.$$

Ainsi la condition cherchée sera

$$(39) \quad gm'' + hn'' + kp'' = \pm 1.$$

Si le plan (ghk) contient les Sommets (m, n, p), (m', n', p'), comme cela a été supposé ci-dessus (problème XVII), et si l'on remplace, dans l'équation (39), g, h et k par leurs valeurs tirées des équations (35), la condition cherchée deviendra

$$(40) \quad m''(np' - pn') + n''(pm' - mp') + p''(mn' - nm') = \pm D.$$

Dans cette formule, D est le plus grand commun diviseur des binômes $np' - pn'$, $pm' - pm'$, $mn' - nm'$.

THÉORÈME XXXII. — *Si trois Rangées, partant d'un même Sommet, sont conjuguées dans l'espace, deux d'entre elles seront conjuguées, l'une par rapport à l'autre, sur leur plan de jonction.*

Cette proposition résulte évidemment de la définition des Rangées conjuguées (page 7).

Le parallélipède construit sur les paramètres de ces trois Rangées est un des parallélipèdes générateurs de l'Assemblage : les trois faces qui s'assemblent à l'origine forment trois plans conjugués ayant pour plans limitrophes les trois autres faces.

THÉORÈME XXXIII. — *Si l'on remplace le système des trois Rangées conjuguées OA, OB, OD (fig. 17) par le système des trois Rangées conjuguées OA', OB, OD, le volume du parallélipède ne sera pas altéré par ce changement.*

En effet, la droite AA' sera située dans un plan parallèle au plan BOD; ainsi, les parallélipèdes générateurs, dans les deux systèmes d'axes, auront la même base OBB'D, et leurs hauteurs seront égales.

THÉORÈME XXXIV. — *Si l'on substitue au système des trois Rangées conjuguées OA, OB, OD (fig. 17), le système OA, OB', OD', les Rangées OB' et OD' étant conjuguées l'une de l'autre sur le plan BOD, le volume du parallélipède générateur restera le même après ce changement.*

Car les bases parallélogrammiques de ces parallélipèdes ont même surface sur le plan OBD (théorème III); les hauteurs sont les mêmes : donc les volumes sont égaux.

THÉORÈME XXXV. — *Le parallélipède générateur d'un Assemblage a toujours le même volume, quel que soit le système de Rangées conjuguées dont il dérive.*

Soient Ox, Oy, Oz (fig. 18) les trois paramètres qui ont servi à construire les Sommets de l'Assemblage; soit Ω le volume du parallélipède construit sur ces trois paramètres; soient OA, OB, OD les trois Rangées conjuguées qui nous sont données, et Ω' le volume du parallélipède générateur correspondant.

Soit maintenant OA' la trace du plan AOB sur le plan des xy ; cette trace est l'une des Rangées du Réseau du plan AOB (théorème XXXI). Soit donc OB' l'une de ses conjuguées, dans le même plan. On pourra, en vertu du théorème XXXIV, remplacer le système de Rangées (OA, OB, OD) par le système (OA', OB', OD), sans altérer le volume Ω' du parallélipède générateur.

Soit, de même, OD' la Rangée, trace du plan OB'D sur le plan des xy , et soit OB'' une Rangée conjuguée de OD' dans le plan OB'D. On pourra

substituer au système (OA', OB', OD) le système (OA', OD', OB''), sans altérer le volume Ω' du parallépipède générateur.

On peut, enfin, remplacer (OA', OD', OB'') par (Ox, Oy, OB''), puisque Ox et Oy sont deux Rangées conjuguées du plan AO'D', qui coïncide avec le plan des xy. Le volume du parallépipède générateur restera égal à Ω' .

Si l'on compare ce dernier parallépipède au parallépipède construit sur Ox, Oy, Oz, on aura, en vertu du théorème XXXIII,

$$\Omega' = \Omega.$$

Deuxième démonstration. — Nous conviendrons de nommer *densité de l'Assemblage* le nombre des Sommets contenus dans l'unité de volume, les dimensions de cette unité de volume étant supposées, toutes les trois, extrêmement grandes comparativement aux paramètres des Rangées que l'on considère.

Ceci posé, soient (*fig.* 18)

$$\begin{aligned} OA &= a', \quad OB = b', \quad OD = d', \\ \text{angle } AOB &= \delta', \quad \text{inclinaison de OD sur le plan } AOB = \tau'. \end{aligned}$$

On aura, par une formule connue,

$$\Omega' = a' b' d' \sin \delta' \sin \tau'.$$

Prenons, sur les droites OA, OB, OD prolongées, des longueurs α, ι, σ très-grandes relativement à a', b', d' , de manière que le parallépipède construit sur α, ι, σ soit égal à l'unité de volume, et qu'ainsi l'on ait

$$\alpha \iota \sigma \sin \delta' \sin \tau' = 1.$$

Le nombre des Sommets contenus dans ce parallépipède se calculera comme le nombre des boulets d'une pile à faces rectangulaires, et sera égal à

$$\frac{\alpha}{a'} \times \frac{\iota}{b'} \times \frac{\sigma}{d'}.$$

On aura donc, ρ étant ce nombre, toujours très-grand,

$$\rho = \frac{\alpha \iota \sigma}{a' b' d'} = \frac{\alpha \iota \sigma \sin \delta' \sin \tau'}{a' b' d' \sin \delta' \sin \tau'} = \frac{1}{\Omega'}.$$

Or le nombre ρ , qui mesure la densité de l'Assemblage, doit rester constant, quel que soit le système d'axes conjugués que l'on ait adopté pour sa détermination.

Si donc l'on pose

$$Ox = a, \quad Oy = b, \quad Oz = d,$$

$$\text{angle } xOy = \delta, \quad \text{inclinaison de } Oz \text{ sur } xOy = \tau,$$

on aura

$$(41) \quad \Omega' = \Omega = abd \sin \delta \sin \tau.$$

THÉORÈME XXXVI. — *Réciproquement, si le parallépipède construit sur les paramètres des Rangées OA, OB, OD (fig. 18) est égal en volume au parallépipède générateur de l'Assemblage, les trois Rangées seront conjuguées.*

Concevons que dans l'intérieur du parallépipède il existe un Sommet de l'Assemblage, et nommons P ce Sommet, choisi de manière à être aussi rapproché que possible du plan AOB : le parallépipède construit sur OP, OA, OB serait égal à Ω (théorème précédent) : donc le parallépipède construit sur OD, OA, OB, qui a même base sur le plan OAB et une hauteur plus grande aurait un volume plus grand que Ω , ce qui est contraire à l'hypothèse comprise dans l'énoncé du théorème ; donc, etc.

PROBLÈME XXII. — *Trouver la condition pour que trois Rangées soient conjuguées.*

Soient (m, n, p) , (m', n', p') , (m'', n'', p'') les coordonnées des trois Sommets T, T', T'' (fig. 20). On suppose que m, n, p n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité, et qu'il en est de même pour m', n', p' , et pour m'', n'', p'' . On demande la condition pour que les Rangées OT, OT', OT'', dont les symboles sont mnp , $m'n'p'$, $m''n''p''$, soient des Rangées conjuguées.

Soient (ξ, η, ζ) , (ξ', η', ζ') , (ξ'', η'', ζ'') les coordonnées linéaires des points T, T', T'', dans le système d'axes conjugués Ox, Oy, Oz , ayant pour paramètres a, b, d .

On démontre, dans les Traités de Géométrie analytique, que le volume d'un tétraèdre, ayant son sommet à l'origine, et les sommets de sa base triangulaire aux points (ξ, η, ζ) , (ξ', η', ζ') , (ξ'', η'', ζ'') , a pour valeur,

au signe près,

$$\frac{1}{6}(\xi n' \zeta'' - \xi \zeta' n'' + \zeta \xi' n'' - n \xi' \zeta'' + n \zeta' \xi'' - \zeta n' \xi''),$$

si le système d'axes est rectangulaire.

Mais, si les axes sont obliques, et si l'on a

$$\text{angle } xOy = \delta, \quad \text{inclinaison de } Oz \text{ sur } xOy = \tau,$$

ce volume doit être multiplié par $\sin \delta \sin \tau$.

Donc, si l'on nomme Ω' le volume du parallélipède construit sur les paramètres OT, OT' et OT'', Ω celui du parallélipède générateur, on aura, au signe près,

$$\Omega' = (mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm'') abd \sin \delta \sin \tau,$$

ou encore, à cause de l'équation (41),

$$(42) \quad \Omega' = (mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - p'n'm'') \Omega.$$

Si les Rangées sont conjuguées, on doit avoir $\Omega' = \Omega$ (théorème XXXV). Donc la condition cherchée sera

$$(43) \quad mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm'' = \pm 1.$$

Réciproquement, si l'équation (43) est satisfaite, on en conclura $\Omega' = \Omega$, et les trois Rangées seront conjuguées (théorème XXXVI).

PROBLÈME XXIII. — *Trouver la condition pour que deux Rangées, allant de l'origine aux points T, T' (fig. 20), soient conjuguées sur le plan réticulaire qui contient ces deux Rangées.*

Soient (m, n, p) , (m', n', p') les coordonnées de T et T'. L'équation du plan OTT' sera donnée par la formule (36), dans laquelle g, h, k ont des valeurs indiquées par les formules (35). L'équation des deux plans réticulaires limitrophes de OTT' sera donnée (problème XIX) par

$$gx + hy + kz = \pm 1.$$

Ainsi cette équation pourra s'écrire

$$x(np' - pn') + y(pm' - mp') + z(mn' - nm') = \pm D.$$

Soient maintenant (m'', n'', p'') les coordonnées d'un Sommet T'' appartenant à l'un de ces plans limitrophes; OT'' sera une Rangée conjuguée avec le plan OTT' , et l'on aura

$$(44) \quad m''(np' - pn') + n''(pm' - mp') + p''(mn' - nm') = \pm D.$$

Mais, si OT et OT' sont déjà des Rangées conjuguées l'une à l'autre sur le plan OTT' , OT , OT' et OT'' seront trois Rangées conjuguées, et l'on aura, en vertu de la condition exprimée par (43),

$$m''(np' - pn') + n''(pm' - mp') + p''(mn' - nm') = \pm 1.$$

De cette équation et de l'équation (44), on conclut $D = 1$. Réciproquement, si D est égal à 1, la condition (43) sera satisfaite, et les Rangées OT , OT' seront conjuguées entre elles sur leur plan de jonction (théorème XXXII).

Donc, si $np' - pn'$, $pm' - mp'$, et $mn' - nm'$ n'ont d'autre diviseur commun que l'unité, les Rangées OT et OT' sont des Rangées conjuguées du Réseau du plan OTT' , et la réciproque est également vraie.

THÉORÈME XXXVII. — *Si (m, n, p) , (m', n', p') sont les coordonnées numériques des Sommets T , T' (fig. 20), le nombre des bandes parallèles à OT ou à OT' , et contenues entre deux côtés opposés du parallélogramme construit sur OT , OT' , sera égal au plus grand commun diviseur des trois binômes $np' - pn'$, $pm' - mp'$, $mn' - nm'$.*

En effet, soient m'', n'', p'' les coordonnées d'un Sommet T'' appartenant à un plan réticulaire limitrophe du plan OTT' . On aura (équation 44)

$$m''(np' - pn') + n''(pm' - mp') + p''(mn' - nm') = \pm D.$$

Soit Ω' le volume du parallélipède construit sur les trois arêtes OT , OT' , OT'' ; la valeur de Ω' sera donnée par l'équation (42), qui se changera, dans le cas actuel, en

$$\Omega' = \Omega D.$$

Soient maintenant ω l'aire du parallélogramme générateur du Réseau du plan OTT' , ω' l'aire du parallélogramme construit sur OT et OT' , enfin Δ l'épaisseur de la strate comprise entre T'' et le plan OTT' ; on aura

$$\Omega = \Delta \omega, \quad \Omega' = \Delta \omega'.$$

Donc aussi

$$(45) \quad \omega' = \omega D.$$

Or le rapport $\omega' : \omega$ devra évidemment être égal au nombre de bandes parallèles soit à OT, soit à OT', qui traversent le triangle OTT' : donc D représentera ce nombre de bandes ; donc ce nombre sera le plus grand commun diviseur de nos trois binômes.

THÉORÈME XXXVIII. — *Dans un système de plans réticulaires parallèles ayant pour symbole (ghk) et dont le parallélogramme générateur a pour surface ω , le triangle intercepté par les axes conjugués dans le plan*

$$gx + hy + kz = 1,$$

a pour aire le quotient de l'aire $\frac{1}{2}\omega$ par le produit ghk des caractéristiques, et l'aire du triangle intercepté par ces mêmes axes dans le plan

$$gx + hy + kz = ghk,$$

a pour valeur le produit de $\frac{1}{2}\omega$ par ghk.

Soient GHK (fig. 19) le plan

$$gx + hy + kz = 1,$$

et G'H'K' le plan

$$gx + hy + kz = ghk,$$

de sorte qu'on ait, a, b, d étant les trois paramètres de Ox, Oy, Oz,

$$(46) \quad \begin{cases} OG' = hka, & OG = \frac{a}{g}, \\ OH' = gkb, & OH = \frac{b}{h}, \\ OK' = ghd, & OK = \frac{d}{k}, \end{cases}$$

$$\text{aire G'H'K'} : \text{aire GHK} :: \overline{OG'}^2 : \overline{OG}^2 :: g^2 h^2 k^2 : 1.$$

Transportons l'origine des coordonnées en G', les axes gardant leurs directions. Les coordonnées numériques $(m, n, p), (m', n', p')$ des Sommets

H' et K', pour cette position des axes, seront

$$\begin{aligned} m &= -hk, & n &= gk, & p &= 0, \\ m' &= -hk, & n' &= 0, & p' &= gh; \end{aligned}$$

on en conclut

$$\begin{aligned} np' - pn' &= g^2hk, \\ pm' - mp' &= gh^2k, \\ mn' - nm' &= ghk^2, \end{aligned}$$

et, D étant le plus grand commun diviseur des trois binômes,

$$D = ghk,$$

attendu que g, h, k sont des nombres premiers entre eux.

Soit donc ω l'aire de la maille génératrice des Réseaux des plans GHK, G'H'K': on aura, en vertu du théorème XXXVII et de l'équation (45),

$$(47) \quad 2 \text{ aire tri. G'H'K'} = \omega D = ghk\omega,$$

ce qui démontre la deuxième partie du théorème. Et, comme on a, d'autre part,

$$\text{aire tri. GHK} = \frac{\text{aire tri. G'H'K'}}{g^2h^2k^2},$$

il en résulte

$$(48) \quad 2 \text{ aire tri. GHK} = \frac{\omega}{ghk}.$$

PROBLÈME XXIV. — *Trouver l'aire du parallélogramme générateur dans le système des plans réticulaires indiqués par le symbole (ghk) .*

Je nommerai α, β, δ (*fig. 19*) les angles zOy, zOx et yOx de l'angle trièdre O; μ, ν, ϖ les angles dièdres du même angle solide, μ étant l'angle dièdre dont Ox est l'arête, ν, ϖ étant les angles dièdres dont Oy et Oz sont les arêtes. Je nommerai $S(ghk)$ l'aire inconnue du parallélogramme générateur des Réseaux des plans (ghk) . Ceci posé, on aura, par une formule connue que j'emprunte à la Géométrie analytique à trois dimensions,

$$(49) \quad \begin{cases} \overline{GHK}^2 = \overline{GHO}^2 + \overline{GKO}^2 + \overline{HKO}^2 - 2GHO.GKO \cos \mu \\ \quad - 2GHO.HKO \cos \nu - 2GKO.HKO \cos \varpi. \end{cases}$$

Le plan GHK étant le plan réticulaire qui a pour équation

$$gx + hy + kz = 1,$$

on aura

$$\text{aire tri. GHO} = \frac{1}{2} OG \cdot OH \sin \delta = \frac{1}{2} \frac{a}{g} \frac{b}{h} \sin \delta,$$

$$\text{aire tri. GKO} = \frac{1}{2} OG \cdot OK \sin \beta = \frac{1}{2} \frac{a}{g} \frac{d}{k} \sin \beta,$$

$$\text{aire tri. HKO} = \frac{1}{2} OH \cdot OK \sin \alpha = \frac{1}{2} \frac{b}{h} \frac{d}{k} \sin \alpha.$$

Convenons maintenant de représenter $bd \sin \alpha$ par ϕ ,

$ad \sin \beta$ par χ ,

$ab \sin \delta$ par ψ ;

ϕ sera l'aire de la maille du Réseau du plan des yz , soit $S(100)$;

χ sera l'aire analogue pour le plan des xz , soit $S(010)$;

ψ sera l'aire analogue pour le plan des xy , soit $S(001)$.

On aura alors

$$\text{aire tri. GHO} = \frac{1}{2} \frac{\psi}{gh},$$

$$\text{aire tri. GKO} = \frac{1}{2} \frac{\chi}{gk},$$

$$\text{aire tri. HKO} = \frac{1}{2} \frac{\phi}{hk};$$

mais, d'autre part, en vertu du théorème XXXVIII,

$$\text{aire tri. GHK} = \frac{1}{2} \frac{S(ghk)}{ghk}.$$

Donc, en substituant ces valeurs dans l'équation (49), il viendra

$$(50) \quad \begin{cases} S^2(ghk) = g^2 \phi^2 + h^2 \chi^2 + k^2 \psi^2 \\ \quad - 2gh\phi\chi \cos \omega - 2gk\phi\psi \cos \nu - 2hk\chi\psi \cos \mu, \end{cases}$$

et cette équation fera connaître l'aire du parallélogramme générateur du plan réticulaire (ghk), dès que l'on connaîtra les aires analogues pour les Réseaux des trois plans coordonnés conjugués.

PROBLÈME XXV. — *Trouver l'épaisseur des strates parallèles aux plans réticulaires dont le symbole est (ghk).*

Soit toujours $S(ghk)$ l'aire du parallélogramme générateur du Réseau du

système (ghk) . Soient Δ l'épaisseur des strates correspondantes, et Ω le volume du parallélipède générateur; on aura

$$(51) \quad \Omega = \Delta S(ghk).$$

Conservons aux angles $\alpha, \beta, \delta, \mu, \nu, \varpi$ leurs significations précédentes; nous pourrions mettre l'équation (41) sous la forme

$$(52) \quad \Omega = abd \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \delta + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \delta}.$$

Tirons de l'équation (50) la valeur de $S^2(ghk)$ pour la substituer dans l'équation (51) élevée au carré; nous aurons

$$\Delta^2 = \frac{a^2 b^2 d^2 (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \delta + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \delta)}{g^2 \varphi^2 + h^2 \chi^2 + k^2 \psi^2 - 2 gh \varphi \chi \cos \varpi - 2 gk \varphi \psi \cos \nu - 2 hk \chi \psi \cos \mu}.$$

Enfin, si nous remplaçons φ, χ, ψ par leurs valeurs en $a, b, d, \alpha, \beta, \delta$, cette équation deviendra

$$(53) \quad \Delta^2 = \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \delta + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \delta}{\frac{g^2 \sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{h^2 \sin^2 \beta}{b^2} + \frac{k^2 \sin^2 \delta}{d^2} - 2 \frac{gh \sin \alpha \sin \beta}{ab} \cos \varpi - 2 \frac{gk \sin \alpha \sin \delta}{ad} \cos \nu - 2 \frac{hk \sin \beta \sin \delta}{bd} \cos \mu}.$$

On aurait pu arriver directement à cette formule, en cherchant l'expression analytique de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan dont l'équation, en coordonnées linéaires, est

$$g \frac{\xi}{a} + h \frac{\eta}{b} + k \frac{\zeta}{d} = 1.$$

THÉOREME XXXIX. — *L'intervalle moyen des Sommets d'un Assemblage est égal à la racine cubique du volume de son parallélipède générateur.*

Conformément à la définition donnée par Poisson de l'intervalle moyen (voyez page 21), nous nommerons *intervalle moyen des Sommets d'un Assemblage* le côté d'un cube égal à l'unité de volume divisée par le nombre des Sommets que renferme cette unité de volume.

Soit E cet intervalle moyen; en nommant toujours ρ le nombre des Sommets, supposé très-considérable, que contient l'unité de volume, on aura

$$E^3 = \frac{1}{\rho};$$

d'où, à cause de $\rho = \frac{1}{\Omega}$ (voyez deuxième démonstration du théorème XXXV), on conclura

$$(54) \quad E^3 = \Omega, \quad E = \sqrt[3]{\Omega},$$

Ω étant le volume invariable du parallélépipède générateur de l'Assemblage.

PROBLÈME XXVI. — *Changer les axes coordonnés et exprimer les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes, et réciproquement.*

Soient (m, n, p) , (m', n', p') , (m'', n'', p'') les coordonnées numériques des extrémités T, T', T'' (fig. 20) des paramètres des trois Rangées qui doivent servir de nouveaux axes. Soient X, Y, Z les coordonnées numériques d'un Sommet quelconque dans le nouveau système d'axes. Par une voie analogue à celle qui conduit aux équations (17), on obtiendra

$$(55) \quad \begin{cases} x = mX + m'Y + m''Z, \\ y = nX + n'Y + n''Z, \\ z = pX + p'Y + p''Z. \end{cases}$$

La Rangée OT allant de l'origine au point (m, n, p) est censée servir d'axe des X. La Rangée OT' sert d'axe des Y, et la Rangée OT'', d'axe des Z.

Je pose maintenant, pour abréger,

$$(56) \quad \begin{cases} mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm'' = (mn'p''), \\ mn' - nm' = (mn'), \quad nm'' - mn'' = (nm''), \quad m'n'' - n'm'' = (m'n''), \\ pm' - mp' = (pm'), \quad mp'' - pm'' = (mp''), \quad p'm'' - m'p'' = (p'm''), \\ np' - pn' = (np'), \quad pn'' - np'' = (pn''), \quad n'p'' - p'n'' = (n'p''). \end{cases}$$

Si, par les procédés connus de l'élimination, on tire des équations (55) les valeurs de X, Y, Z, on aura

$$\begin{aligned} X &= \frac{(n'p'')}{(mn'p'')}x + \frac{(p'm'')}{(mn'p'')}y + \frac{(m'n'')}{(mn'p'')}z, \\ Y &= \frac{(pn'')}{(mn'p'')}x + \frac{(mp'')}{(mn'p'')}y + \frac{(nm'')}{(mn'p'')}z, \\ Z &= \frac{(np')}{(mn'p'')}x + \frac{(pm')}{(mn'p'')}y + \frac{(mn')}{(mn'p'')}z; \end{aligned}$$

d'où l'on voit que, pour que X, Y, Z soient toujours des nombres entiers, il faut que les trois Rangées données soient conjuguées.

En adoptant cette hypothèse, on aura

$$(mn'p'') = \pm 1,$$

ce qui changera les précédentes équations en

$$(57) \quad \begin{cases} \pm X = (n'p'')x + (p'm'')y + (m'n'')z, \\ \pm Y = (pn'')x + (mp'')y + (nm'')z, \\ \pm Z = (np')x + (pm')y + (mn'')z. \end{cases}$$

Par une rotation convenable du système OT, OT', OT'' autour de O , amenez OT sur Ox , amenez OT' dans le plan xOy , en ayant soin que OT' et Oy soient situés d'un même côté par rapport à la droite Ox indéfiniment prolongée dans les deux sens : alors, si OT'' et Oz tombent du même côté par rapport au plan des xy , vous devrez donner le signe $+$ aux premiers membres des équations (57); dans le cas contraire, vous devrez préférer le signe $-$.

Corollaire. — Supposons que l'axe des z change seul et soit remplacé par OT'' , et nommons m_0, n_0 les coordonnées numériques de T'' parallèlement aux axes des x et des y .

Dans ce cas, l'on aura

$$\begin{aligned} m &= 1, & n &= 0, & p &= 0, \\ m' &= 0, & n' &= 1, & p' &= 0, \\ m'' &= m_0, & n'' &= n_0, & p'' &= 1, \end{aligned}$$

et les équations (55) donneront

$$\begin{aligned} x &= X + m_0 Z, \\ y &= Y + n_0 Z, \\ z &= Z. \end{aligned}$$

Les formules inverses seront alors

$$\begin{aligned} X &= x - m_0 z, \\ Y &= y - n_0 z, \\ Z &= z. \end{aligned}$$

La coordonnée numérique parallèle à l'axe déplacé reste invariable.

PROBLÈME XXVII. — *On demande ce que devient le symbole d'un plan réticulaire (ghk) dans un nouveau système d'axes.*

Soient toujours (m, n, p) , (m', n', p') , (m'', n'', p'') les coordonnées numériques des extrémités T, T', T'' (fig. 20) des paramètres des trois Rangées qui doivent servir de nouveaux axes. Si, dans l'équation générale

$$gx + hy + kz = C,$$

on substitue les valeurs de x, y, z , tirées des équations (55), l'on aura

$$(gm + hn + kp)X + (gm' + hn' + kp')Y + (gm'' + hn'' + kp'')Z = C;$$

d'où l'on voit que, dans ce nouveau système d'axes, le symbole des plans (ghk) se change en $(gm + hn + kp, gm' + hn' + kp', gm'' + hn'' + kp'')$; c'est-à-dire que, si le nouveau symbole est (GHK) , l'on aura

$$(58) \quad \begin{cases} G = gm + hn + kp, \\ H = gm' + hn' + kp', \\ K = gm'' + hn'' + kp''. \end{cases}$$

Corollaire. — Si, conservant les axes des x et des y , on se borne à remplacer l'axe des z , et à prendre pour nouvel axe des z la Rangée $\bar{1} \bar{1} \bar{1}$, qui est le prolongement en sens inverse de la diagonale du parallépipède construit sur a, b, d , on aura

$$\begin{aligned} m &= 1, & n &= 0, & p &= 0, \\ m' &= 0, & n' &= 1, & p' &= 0, \\ m'' &= -1, & n'' &= -1, & p'' &= -1, \end{aligned}$$

ce qui change le symbole (ghk) en $(g, h, -g - h - k)$.

Si l'on nomme alors l la caractéristique du plan réticulaire (ghk) relative à ce nouvel axe, on aura l'équation

$$l = -g - h - k.$$

Si e est le paramètre du nouvel axe, le segment intercepté sur cet axe entre l'origine et le plan

$$gx + hy + kz = 1,$$

devenu, dans le nouveau système,

$$gx + hy + lZ = 1,$$

aura évidemment pour valeur $\frac{e}{l}$.

D'où l'on voit que, « lorsque les paramètres a, b, d, e de quatre Rangées »
 » conjuguées deux à deux sont disposés de manière à figurer quatre forces se »
 » faisant équilibre dans l'espace, tout plan limitrophe à un plan réticulaire »
 » passant par l'origine déterminera, dans les paramètres de ces Rangées, »
 » les segments $\frac{a}{g}, \frac{b}{h}, \frac{d}{k}, \frac{e}{l}$, g, h, k, l étant des nombres entiers positifs ou »
 » négatifs; alors on pourra prendre indistinctement pour symbole du plan »
 » réticulaire les notations $(ghk), (ghl), (glk), (lhk)$, et il existera, entre les »
 » quatre caractéristiques g, h, k, l , la relation

$$(59) \quad g + h + k + l = 0. \quad \gg$$

Notation à quatre caractéristiques. — Lorsqu'on emploie, pour fixer la position des plans réticulaires de l'Assemblage, quatre axes coordonnés satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer, il convient de remplacer le symbole (ghk) par le symbole à quatre caractéristiques $(ghkl)$.

Définitions. — Je désigne sous le nom de *tétraèdre élémentaire* tout tétraèdre ayant pour sommets quatre Sommets de l'Assemblage, choisis de manière que chacun d'eux soit situé sur un plan limitrophe au plan réticulaire qui contient les trois autres Sommets, ou encore « tout tétraèdre construit »
 » sur trois paramètres conjugués aboutissant au même Sommet. »

Un tel tétraèdre forme toujours la sixième partie de l'un des parallépipèdes générateurs de l'Assemblage : ainsi, le volume de tous ces tétraèdres est le même et égal à $\frac{1}{6}\Omega$.

Je nomme *tétraèdre principal*, celui dont la base est le triangle acutangle embrassé par les deux paramètres minima de tout l'Assemblage, et dont les trois angles dièdres adjacents à la base sont aigus, deux de ces trois angles pouvant, exceptionnellement, devenir droits.

THÉORÈME XL. — *Tout tétraèdre ayant pour sommets l'origine et les trois points (m, n, p) , (m', n', p') , (m'', n'', p'') , a pour volume le produit du volume du tétraèdre élémentaire par le facteur*

$$mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm''.$$

Ce théorème est une conséquence de la formule (42).

Soit OTT'T'' (fig. 20) le tétraèdre donné; on aura

$$(60) \quad \text{volume tétra. OTT'T''} = \frac{1}{6} \Omega (mn'p'').$$

Cette formule reste exacte, lorsque m, n, p , ou m', n', p' , ou m'', n'', p'' , ont des diviseurs communs autres que l'unité.

PROBLÈME XXVIII. — *Trouver le tétraèdre principal d'un Assemblage.*

Choisissons arbitrairement un Sommet O (fig. 21), et cherchons les deux paramètres minima OA, OB; traçons-les dans un sens tel, que l'angle AOB soit aigu, ou tout au plus égal à 90 degrés, ce qui sera toujours possible. Achéons le triangle AOB, qui sera l'un des triangles principaux du plan réticulaire AOB, et sur l'un quelconque de ses trois côtés, par exemple sur AB, construisons le second triangle principal BAO' qui, réuni au précédent, complète le parallélogramme générateur OAO'B. Sur le contour de ce parallélogramme, élevons à angle droit les faces d'un prisme indéfini dans les deux sens. Le plan réticulaire, limitrophe du plan OAO'B, et situé au-dessus de ce dernier plan, sera coupé par le contour du prisme suivant un parallélogramme égal à la base OAO'B, et qui devra contenir dans son intérieur un Sommet de l'Assemblage, à moins qu'il n'en contienne deux, ou quatre, sur son contour. Soit D ce Sommet; les Rangées OA, OB, OD seront conjuguées, et la pyramide OABD sera le tétraèdre principal.

Si le Sommet ainsi obtenu était situé en d , et se projetait orthogonalement dans l'intérieur du deuxième triangle BAO', les Rangées O'A, O'B, O'd seraient conjuguées, et la pyramide O'ABd serait le tétraèdre principal.

Scolie. — Soit OABD le tétraèdre principal résultant de la construction précédente, et nécessairement situé au-dessus du plan OAO'B. Si nous répétons la même construction sur le plan limitrophe du plan OAO'B, et qui est situé au-dessous de ce dernier plan, nous obtiendrons un autre

Sommet D' , dont la situation par rapport à D sera telle, que A, D, B, D' formeront un parallélogramme. Le tétraèdre $O'ABD'$ sera aussi un tétraèdre principal, mais placé au-dessous du plan $OA O'B$. Il est facile de voir que $OABD, O'ABD'$ sont deux polyèdres *inverses* (*), dont le *pôle de symétrie* sera en ω , au centre du parallélogramme $OA O'B$: d'où l'on voit que, « dans tout Assemblage, il existe deux tétraèdres principaux inverses l'un » de l'autre. »

THÉORÈME XLI. — *Tous les angles plans du tétraèdre principal sont aigus; quelques-uns d'entre eux (quatre au plus) peuvent être droits, exceptionnellement.*

Soient OA, OB (*fig. 21*) les deux paramètres minima de l'Assemblage, et $OABD$ son tétraèdre principal.

La proposition énoncée est évidente pour les trois angles de la base OAB . Menez en O un plan normal à OA : par la construction même du tétraèdre, OD et OA ne peuvent être situés de côtés différents par rapport à ce plan; donc $AOD < 90$ degrés. On démontrerait de la même manière qu'une inégalité pareille a lieu pour les angles DOB, DAO, DAB, DBO, DBA .

Maintenant, de $OB < OD$, on conclut $ODB < OBD < 90$ degrés; de $OA < OD$, on conclut $ODA < OAD < 90$ degrés; enfin, de $BD > BO, DA > OA$, on déduit

$$BD^2 + DA^2 > BO^2 + OA^2.$$

Or, l'angle BOA étant aigu ou droit, on a $BO^2 + OA^2 > \text{ou} = BA^2$; donc aussi

$$BD^2 + DA^2 > BA^2;$$

donc l'angle BDA ne peut surpasser 90 degrés.

Le nombre des angles droits du tétraèdre ne peut d'ailleurs surpasser quatre, le tétraèdre ne possédant pas plus de quatre faces.

Scolie. — Les propriétés du tétraèdre principal sont plus restreintes que celles dont jouit le triangle principal dans les Réseaux. Ses angles dièdres ne sont pas nécessairement tous aigus: il ne possède pas nécessairement tous les paramètres minima du système; enfin, le triangle principal d'aire minimum peut ne pas être l'une de ses quatre faces.

(*) Pour la définition de ces termes, voyez la note (*) de la page 63.

Voici, sans démonstration, l'énoncé de diverses propriétés appartenant au tétraèdre principal.

THÉORÈME XLII. — *Si b est le plus grand des deux paramètres minima de l'Assemblage, et si B est l'angle opposé au côté b dans le triangle principal construit sur ces paramètres, la hauteur du tétraèdre principal sera au moins égale à $b \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cos^2 B}$.*

Corollaire. — Cette même hauteur sera au moins égale à $b \sqrt{\frac{1}{2}}$.

THÉORÈME XLIII. — *Le plus petit des paramètres de l'Assemblage, en dehors du plan contenant les deux paramètres minima, est nécessairement l'une des trois arêtes qui joignent le sommet du tétraèdre principal aux trois sommets de sa base.*

THÉORÈME XLIV. — *Si OB , OA (fig. 21) sont les deux arêtes minima du tétraèdre principal $OABD$, OA étant la plus petite des deux, et si par B on mène la droite BO' égale et parallèle à OA , l'un des quatre triangles AOB , AOD , BOD , $BO'D$ sera le triangle élémentaire à aire minimum de tout l'Assemblage.*

Corollaire. — Le plan réticulaire à aire minimum contient toujours au moins l'un des deux paramètres minima de l'Assemblage.

§ V. — DES ASSEMBLAGES SYMÉTRIQUES.

Définitions. — Je nomme *axe de symétrie* d'un Assemblage toute droite telle, que, l'Assemblage venant à tourner d'un certain angle, et tout d'une pièce, autour d'elle, les mêmes points de l'espace coïncident avec les Sommets de cet Assemblage, avant et après la rotation. Je dis alors que le lieu apparent des Sommets de l'Assemblage a été restitué, après cette rotation.

Pour plus de précision dans les explications qui vont suivre, je supposerai qu'il existe deux Assemblages égaux, superposés Sommet sur Sommet, de manière à figurer un Assemblage unique. L'un de ces Assemblages sera considéré comme invariable de position; l'autre pourra se mouvoir tout d'une pièce, et comme un corps solide, soit par translation, soit par rotation.

Lorsque l'Assemblage mobile, tournant autour de l'axe, reviendra en coïncidence avec l'Assemblage fixe, après une rotation d'un demi-tour, ou de 180 degrés, l'axe sera désigné sous le nom d'*axe de symétrie binaire*, ou, plus brièvement, d'*axe binaire*. Un Sommet quelconque de l'Assemblage aura son *homologue* de l'autre côté de l'axe ; la droite joignant ces deux Sommets sera normale à l'axe, et divisée par lui en deux parties égales.

Lorsque la coïncidence se rétablira après un tiers, un quart, un sixième de tour, l'axe de rotation recevra le nom d'*axe de symétrie ternaire, quaternaire, sénaire*. Dans les Assemblages à axe de symétrie ternaire, les Sommets sont disposés trois par trois autour de l'axe, et chaque Sommet a deux *homologues*. La disposition est de quatre par quatre autour des axes quaternaires, et de six par six autour des axes sénaires.

La symétrie d'un axe aura pour *numéro d'ordre* 2, 3, 4 ou 6, selon qu'elle sera binaire, ternaire, quaternaire ou sénaire. Ce numéro d'ordre sera désigné par la lettre *q*, dans le courant des calculs.

Deux axes de symétrie de même ordre seront dits *axes de même espèce*, lorsque la configuration des Sommets autour de l'un d'eux sera la même qu'autour de l'autre. Pour constater cette similitude de configuration, on lie par la pensée les Sommets de l'Assemblage à chacun des deux axes, et l'un de ces deux systèmes est supposé mobile. Alors, si l'on peut faire coïncider en même temps l'axe mobile avec l'axe fixe, les Sommets mobiles avec les Sommets fixes, les axes seront dits *de même espèce*.

Pour que les axes soient de même espèce, il faut qu'ils soient du même ordre et que leurs paramètres soient égaux : ces conditions sont, en général, suffisantes. Il y a cependant un cas particulier où deux axes binaires peuvent avoir le même paramètre, sans être de même espèce.

Deux axes qui ne satisfont pas aux conditions précédentes seront dits *axes d'espèces différentes*.

Tout Assemblage possédant un ou plusieurs axes de symétrie sera dit *Assemblage symétrique* ; dans le cas contraire, il sera dit *asymétrique*.

Tout plan qui partage un Assemblage en deux moitiés géométriquement symétriques sera nommé *plan de symétrie* de l'Assemblage. Chaque Sommet trouve alors son *homologue* sur le côté opposé du plan.

THÉORÈME XLV. — *Le plus petit angle qui restitue les lieux des Sommets d'un Assemblage symétrique, pendant sa rotation autour d'un axe de symétrie, est un sous-multiple de 360 degrés.*

Soient M (fig. 13) l'un des Sommets de l'Assemblage, et MO la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe. Donnons, autour de l'axe, à l'Assemblage mobile une rotation MOM' qui ne trouble pas les lieux des Sommets, et soit

$$MOM' = Q.$$

Pendant que le Sommet mobile M viendra se superposer au Sommet fixe M', le Sommet mobile M' viendra en M'', et nous aurons

$$OM'' = OM' = OM, \quad M''OM' = Q.$$

Décrivons un cercle de centre O et de rayon OM, puis faisons

$$\text{arc } M''M' = \text{arc } M'M, \quad \text{arc } M''M'' = \text{arc } M''M';$$

il est clair que M, M', M'', ..., seront autant de Sommets de l'Assemblage fixe, et que les cordes des arcs formeront un polygone régulier inscrit, lequel, après un ou plusieurs tours, viendra se fermer sur lui-même, au point de départ, en M : sans cela, il y aurait une infinité de Sommets de l'Assemblage sur la circonférence du cercle, ce qui est impossible. D'ailleurs on peut toujours supposer que M, M' sont deux sommets voisins, et alors MOM' sera le plus petit angle de rotation qui restitue les lieux des Sommets. On aura donc, en nommant Q cet angle minimum,

$$(61) \quad Q = \frac{360^\circ}{q}.$$

THÉORÈME XLVI. — *Un Assemblage ne peut posséder que des axes de symétrie binaire, ternaire, quaternaire ou sénaire.*

Sur MM', M'M'' (fig. 13), achevons le losange MM'M''m; le point m sera un Sommet de l'Assemblage, et nous trouverons facilement

$$Om = OM' (1 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} Q).$$

Pour $q=2$, $Q=180^\circ$, nous avons $Om = -3OM'$;

Pour $q=3$, $Q=120^\circ$, $Om = -2OM'$;

Pour $q=4$, $Q=90^\circ$, $Om = -OM'$;

Pour $q=5$, $Q=72^\circ$, $Om = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}OM' = -0,382OM'$;

Pour $q=6$, $Q=60^\circ$, $Om = 0$;

Pour $q>6$, $Q<60^\circ$, $Om < OM'$.

Les solutions $q = 5$ et $q > 6$ ne sont évidemment pas admissibles ; car on peut toujours supposer que M a été pris à la distance minimum de l'axe de rotation, et, par conséquent, l'inégalité $Om < OM'$ est impossible, sauf dans le cas où l'on aurait $Om = 0$, parce qu'alors O serait un Sommet de l'Assemblage.

Donc, si l'Assemblage a un axe de symétrie, on aura nécessairement

$$q = 2, 3, 4 \text{ ou } 6,$$

q étant le numéro d'ordre de la symétrie propre à l'axe que l'on considère.

Corollaire. — Des rotations de 60, 90, 120, 180, 240, 270 et 300 degrés sont les seules qui puissent restituer, dans certains cas, les lieux des Sommets d'un Assemblage.

THÉORÈME XLVII. — *Lorsqu'il existe, dans un Assemblage, un axe de symétrie ne passant par aucun Sommet, les droites parallèles, menées par des Sommets, sont des axes possédant la même symétrie.*

Soit q le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe considéré MM' (*fig. 22*), et soit m un Sommet quelconque, lequel, après une rotation, égale à $\frac{360^\circ}{q}$ de l'Assemblage mobile, vient occuper le lieu du Sommet m' . Si l'on transporte parallèlement à lui-même, et de m' en m , l'Assemblage mobile qui aura subi cette rotation préalable, il se trouvera placé dans les mêmes conditions que s'il eût tourné, dès le principe, autour d'une droite nmn' , menée par m parallèlement à MM' ; et, comme le lieu des Sommets n'a pas été troublé, cette droite nmn' est aussi un axe de symétrie de l'Assemblage. L'ordre de symétrie de cet axe sera, en général, égal à q . Toutefois, comme un axe d'ordre jq , j étant un nombre entier quelconque, jouit à *fortiori* des propriétés des axes d'ordre q , il pourrait arriver que le nouvel axe fût d'un ordre plus élevé, mais qui devra toujours être un multiple de l'ordre de symétrie de l'axe donné (*).

Définition. — Nous désignerons sous le nom d'*axes intermédiaires* les axes

(*) Cette démonstration est due à M. Cauchy : comme elle est plus simple que la démonstration que j'avais donnée moi-même de ce théorème, je l'ai substituée à cette dernière. (*Voyez les Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXIX, p. 135.)

qui ne contiennent aucun Sommet de l'Assemblage. D'après le théorème précédent, les axes intermédiaires sont toujours accompagnés d'axes de même symétrie, menés par les Sommets; d'où il résulte que l'on peut, à la rigueur, se borner à considérer ces derniers, dans toute recherche qui n'a pas pour but de déterminer d'une manière spéciale les propriétés propres aux axes intermédiaires.

THÉORÈME XLVIII. — *Tout axe de symétrie contenant un Sommet est une des Rangées de l'Assemblage.*

Soit MM' (fig. 22) l'axe donné passant par le Sommet M ; soient m un autre Sommet extérieur à l'axe, et m', m'', \dots , ses homologues par rapport à cet axe. Joignons Mm, Mm', Mm'', \dots : si maintenant nous traçons la diagonale $M\mu$ du parallélogramme construit sur Mm, Mm' , cette diagonale sera, en grandeur et en direction, un des paramètres de l'Assemblage, d'après le théorème XXX. De même, si l'on combine $M\mu$ avec Mm'' , la nouvelle diagonale $M\mu'$ jouira des mêmes propriétés. Le résultat final, ainsi obtenu, après avoir épuisé la série des homologues de m , sera le même que si l'on eût composé mécaniquement des forces égales en grandeur et en direction à Mm, Mm', Mm'', \dots , pour en obtenir la résultante. Or, si l'on décompose chacune de ces forces suivant MM' , et normalement à cette droite, il est visible que les composantes normales à MM' s'entre-détruiront par suite de la symétrie, et que les composantes verticales subsisteront seules. Si donc O est le point de rencontre de MM' avec le plan du polygone $mm'm'' \dots$, chacune de ces composantes verticales sera égale à MO : donc, si l'on prend $MM' = qMO$, M' sera aussi un Sommet; donc MM' est une Rangée de l'Assemblage.

THÉORÈME XLIX. — *Tout plan mené par un Sommet normalement à un axe de symétrie est un plan réticulaire de l'Assemblage.*

Soient M le Sommet donné (fig. 22), et MM' l'axe donné, que l'on peut toujours supposer passant par M . Soient m un autre Sommet quelconque, et m', m'' ses homologues. Les lignes menées par M parallèlement à $mm', m'm'', m''m, \dots$, sont évidemment des Rangées de l'Assemblage; donc le plan normal à MM' , et qui contiendra toutes ces droites, sera l'un des plans réticulaires du système.

Si l'axe MM' était un axe binaire, on aurait recours à un deuxième Sommet μ situé hors du plan mMM' ; alors la même démonstration serait encore applicable.

THÉORÈME L. — *Lorsqu'il existe dans un Assemblage un plan de symétrie ne contenant aucun Sommet, tout plan parallèle passant par un Sommet est aussi un plan de symétrie du système.*

Soient m (*fig. 23*) un Sommet quelconque, et m' son homologue de l'autre côté du plan donné GH , qui est, par hypothèse, un plan de symétrie de l'Assemblage. Si l'on transporte parallèlement à lui-même, et de m' en m , c'est-à-dire suivant une direction normale au plan, l'Assemblage mobile, on sait qu'il continuera à être le symétrique de l'Assemblage fixe par rapport au plan normal sur le milieu de la droite qui joint le point mobile m' au point fixe m ; à la limite, lorsque m' coïncidera avec m , le plan de symétrie, toujours parallèle à lui-même, finira par passer par m : mais alors les deux Assemblages, le mobile et le fixe, coïncideront; donc le plan mené par m , parallèlement à GH , sera un plan de symétrie du système.

Scolie. — On peut faire abstraction des plans de symétrie *intermédiaires*, pour ne considérer que ceux passant par des Sommets.

THÉORÈME LI. — *Tout plan de symétrie contenant un Sommet est un plan réticulaire.*

Soit M (*fig. 23*) le Sommet situé dans le plan de symétrie GH ; soient m , m' deux Sommets homologues par rapport à ce plan. La diagonale du losange construit sur Mm , Mm' sera, en grandeur et en direction, le paramètre de l'une des Rangées du système: or il est évident qu'elle est contenue dans le plan de symétrie. On prouverait, de même, qu'il existe d'autres Rangées passant par M , et appartenant au plan de symétrie, mais non situées dans le plan mMm' ; d'où l'on voit que le plan de symétrie est nécessairement un plan réticulaire.

THÉORÈME LII. — *Lorsqu'un Assemblage possède un axe de symétrie d'ordre pair, il possède aussi un système de plans de symétrie tous normaux à cet axe, et, réciproquement, la présence d'un plan de symétrie entraîne celle d'un système d'axes d'ordre pair, normaux à ce plan.*

J'ai démontré, dans une Note sur les polyèdres symétriques de la géo-

métrie (*), que, si l'on fait tourner de 180 degrés le polyèdre *inverse* d'un polyèdre donné P, autour d'une droite A menée par le *pôle de symétrie*, on obtient le polyèdre symétrique de P par rapport au plan de symétrie mené par le pôle normalement à la droite A.

Prenons un Sommet quelconque O (*fig. 23*) pour pôle de symétrie, et construisons l'Assemblage inverse, lequel coïncidera, Sommet à Sommet, avec le primitif; puis, ayant mené par O une droite mOm' parallèle à l'axe d'ordre pair, faisons tourner de 180 degrés l'Assemblage inverse autour de cette droite; il devra recoïncider avec lui-même, Sommet à Sommet, par suite de la symétrie de l'axe. Donc, en vertu de la propriété générale citée plus haut, le plan mené par O normalement à l'axe sera un plan de symétrie pour les deux Assemblages coïncidents, et, par conséquent, pour les deux moitiés de l'Assemblage donné (**).

Le théorème réciproque se démontrera de la manière suivante :

Soit O (*fig. 23*) un Sommet situé sur le plan de symétrie commun à l'Assemblage fixe et à l'Assemblage mobile : on sait, par la théorie générale des polyèdres inverses (*voyez la Note citée*), qu'en faisant tourner de 180 degrés le polyèdre symétrique d'un polyèdre P autour de la normale au plan de symétrie élevée à partir de ce Sommet O, on doit retrouver le polyèdre inverse; dans le cas actuel, en faisant faire ce demi-tour à l'Assemblage mobile, on le fera recoïncider avec l'Assemblage inverse, lequel évidemment ne diffère pas de l'Assemblage donné. Donc la normale est un axe binaire du système. Dans le cas général, on voit qu'elle peut être un axe d'ordre pair quelconque (**).

Définition. — En continuant à désigner par *système de Rangées* l'ensemble de toutes les Rangées parallèles entre elles dans un Assemblage, on a à considérer dans un tel système la *direction, la grandeur du para-*

(*) *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. XIV, p. 138.

Le polyèdre *inverse* de P s'obtient en joignant les sommets de P à un point fixe qui prend le nom de *pôle de symétrie*, et prolongeant ces droites au delà du pôle de quantités égales à elles-mêmes.

(**) On peut aussi considérer ce théorème comme une conséquence immédiate du théorème XXI de mon Mémoire « Sur les Polyèdres de forme symétrique », inséré dans le tome XIV du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville.

(***) Ce théorème réciproque est une conséquence immédiate du théorème IV de mon Mémoire « Sur les Polyèdres de forme symétrique ».

mètre, et enfin la densité du système, qui est égale au nombre des Rangées contenues dans un prisme indéfini de section normale égale à 1, et à arêtes parallèles à la direction commune des Rangées.

Il résulte de la constance des volumes des parallélépipèdes générateurs qu'en passant d'un système de Rangées à un autre, le quotient du paramètre par la densité reste toujours constant et égal au volume Ω du parallélépipède générateur.

Lorsqu'on altère un système de Rangées par l'intercalation de nouveaux Sommets équidistants, entre deux Sommets voisins sur chaque Rangée, on modifie l'Assemblage, et, selon que le nombre des Sommets intercalaires est 1, 2, 3, ..., sur chaque paramètre, le nouvel Assemblage est un Assemblage doublé, triplé, quadruplé, ..., quant au nombre de ses Sommets. Alors le volume Ω du parallélépipède générateur diminue dans le rapport de l'unité aux nombres 2, 3, 4, Ceci posé, l'on peut démontrer le théorème suivant :

THÉOREME LIII. — *Les mêmes systèmes de Rangées se retrouvent dans l'Assemblage primitivement donné et dans l'Assemblage qui en dérive par l'intercalation de nouveaux Sommets sur l'un de ses systèmes de Rangées.*

Soient prises trois Rangées conjuguées pour axes coordonnés, l'axe des z étant l'une des Rangées du système modifié par l'intercalation de nouveaux Sommets: alors, si a, b, d sont les trois paramètres de ces axes, $a, b, \frac{d}{\theta}$ seront les trois paramètres dans le nouvel Assemblage, $\theta - 1$ étant le nombre des Sommets ajoutés sur chaque paramètre. Pour revenir à l'Assemblage primitif on supprimera dans celui-là tous les plans réticulaires de la forme

$$z = j\theta + 1, \dots = j\theta + 2, \dots, = j\theta + \theta - 1,$$

j étant un nombre entier quelconque, et l'on ne conservera que les plans $z = 0, z = \theta, z = 2\theta, \dots, z = j\theta$.

Considérons maintenant la Rangée menée de l'origine O (*fig. 20*) au Sommet t à coordonnées (m, n, p) de l'Assemblage à Sommets intercalaires. Alors, si l'ordonnée p est un multiple de θ , le Sommet t appartiendra à l'Assemblage primitif; le système des Rangées Ot se retrouvera dans l'Assemblage primitif, avec la même grandeur de paramètre. Si l'ordonnée p

n'est pas un multiple de θ , on prolongera Ot de $tt'' = (\theta - 1)Ot$; l'ordonnée numérique du Sommet t'' parallèlement aux z étant alors devenue un multiple de θ , le point t'' appartiendra à l'Assemblage primitif : ainsi le système des Rangées Ot subsistera encore dans l'Assemblage, après la suppression des plans réticulaires

$$z = j\theta + 1, \quad z = j\theta + 2, \dots, \quad z = j\theta + \theta - 1.$$

Donc tous les systèmes de Rangées subsistent, sans que leur direction soit troublée, après la suppression des Sommets intercalaires. Ces systèmes sont seulement altérés, soit dans leur densité, soit dans la grandeur de leur paramètre; pour chacun d'eux, la suppression des Sommets fait croître, dans le rapport $\theta : 1$, le rapport du paramètre à la densité.

Corollaire. — Les mêmes systèmes de Rangées se retrouvant dans les deux Assemblages, avec des modifications qui ne portent que sur la grandeur du paramètre ou la densité du système, il en résulte que les mêmes systèmes de plans réticulaires existent aussi dans les deux Assemblages; toutefois l'épaisseur des strates, ou l'aire de la maille génératrice, variera de l'un à l'autre, de manière à ce que leur produit croisse, dans le rapport $\theta : 1$, par la suppression des Sommets intercalaires.

Après ces théorèmes généraux, nous allons successivement passer en revue les propriétés qui caractérisent chaque genre particulier de symétrie.

Symétrie binaire.

THÉOREME LIV. — *Dans tout Assemblage à axe de symétrie binaire, si l'on considère les deux plans réticulaires limitrophes d'un plan réticulaire normal à l'axe binaire, le Réseau de l'un de ces deux plans coïncide avec la projection orthogonale du Réseau de l'autre.*

Car, soient P un plan réticulaire normal à l'axe, P' et P'' ses deux limitrophes; les Réseaux de P' et P'' sont homologues par rapport au plan P qui est un plan de symétrie de l'Assemblage (théorème LII) : donc le Réseau de l'un des plans P' , P'' est la projection orthogonale du Réseau de l'autre.

Corollaire. — Si l'on affecte des numéros d'ordre à tous ces plans réticulaires successifs, tous normaux à l'axe, on voit que, dans la série des plans à numéro d'ordre pair, le même Réseau se reproduira, en projection

orthogonale; il en sera de même dans la série des plans à numéro d'ordre impair.

THÉORÈME I.V. — *Tout Assemblage à axe de symétrie binaire peut être considéré comme dérivant d'un prisme droit à base parallélogrammique, lequel peut, dans certains cas, offrir en son centre de figure l'un des Sommets de l'Assemblage.*

Soit ABCDE (fig. 24) le Réseau tracé sur le plan normal à l'axe binaire et passant par un Sommet A. Prenons ce plan pour plan des xy ; son équation en coordonnées numériques sera $z = 0$.

Tous les Réseaux tracés sur les plans $z = \pm 2, z = \pm 4, z = \pm 6, \dots$, se projetteront orthogonalement sur le Réseau ABCD... (théorème LIV).

Les Réseaux des plans $z = \pm 1, z = \pm 3, \dots$, pourront aussi se projeter orthogonalement sur ABCD...; dans ce cas, le parallépipède générateur sera un prisme droit à base parallélogrammique.

Mais le contraire pourra aussi avoir lieu. Supposons alors que l'un des Sommets A' du Réseau $z = 1$ se projette en a sur le plan $z = 0$. Si l'on joint A avec A', et si l'on prolonge AA' d'une quantité égale à elle-même, jusqu'en D'', D'' sera évidemment un Sommet du Réseau $z = 2$; et si l'on abaisse les perpendiculaires A'a, D''D, D sera l'un des Sommets du Réseau $z = 0$ (théorème LIV), et a sera situé au milieu de la longueur aD. Le Sommet A ayant été choisi arbitrairement, on voit que a est un centre géométrique du Réseau ABCD..., et occupe le milieu de l'un des paramètres AD de ce Réseau. Maintenant, sur AD comme base, construisons deux triangles élémentaires égaux et opposés, tels que ACD, AED; le point a sera le centre du parallélogramme générateur ACDE, et A' sera le centre de figure du prisme droit ayant pour base inférieure ACDE, et sa base supérieure sur le plan $z = 2$. L'Assemblage pourra donc être considéré comme composé d'une infinité de tels prismes, de hauteur égale à l'intervalle compris entre les plans $z = 0, z = 2$, et portant en outre, chacun en son centre de figure, l'un des Sommets de l'Assemblage.

Scolie I. — Il est toujours permis de supposer que A a été choisi de manière à être, parmi tous les Sommets du Réseau $z = 0$, le plus voisin du point a ; alors, si AD n'est pas le paramètre minimum du Réseau $z = 0$, soit AB ce paramètre minimum, porté dans un sens tel, que l'on ait

$BAD < 90$ degrés. Puisque l'on a $aB > aA$, le Sommet B est en dehors de la circonférence décrite sur AD comme diamètre, et ainsi il est certain que l'on a $ABD < 90$ degrés. Mais, d'autre part, à cause de $AB < BD$, on a aussi $ADB < BAD < 90$ degrés; donc les trois angles du triangle BAD sont aigus: ainsi, BAD sera le triangle principal du Réseau $z = 0$. (théorème VI). Donc la projection de A' tombera toujours sur le milieu de l'un des trois côtés du triangle principal; ce qui prouve que l'alternance des Réseaux à numéros d'ordre alternativement pairs et impairs ne peut se faire que de trois manières différentes, selon que la projection des Sommets du Réseau $z = 1$ se fait sur le milieu du petit, du moyen, ou du grand côté du triangle principal du Réseau $z = 0$.

D'où l'on voit encore que l'Assemblage peut aussi être considéré comme composé de prismes ayant pour base un parallélogramme tel que ABCD, ayant pour hauteur l'intervalle compris entre les plans $z = 0$ et $z = 2$, et portant des Sommets sur les centres de deux de leurs faces verticales rectangulaires; la base de chacune des deux faces *centrées* peut toujours alors être supposée formée par l'un des trois côtés du triangle principal.

Scolie II. — Dans le cas de l'alternance des Réseaux, on peut encore substituer au prisme droit centré l'octaèdre de la *fig. 28*, dont l'axe A'A'' traverse normalement et centralement la base parallélogrammique ACDE.

Il doit être entendu que cet octaèdre n'est point pour cela un *solide générateur*, capable de reproduire, par des juxtapositions immédiates, tous les Sommets de l'Assemblage.

Symétrie terbinaire.

THÉORÈME LVI. — *Si le solide générateur de l'Assemblage est un prisme droit à base rhombe, centré ou non centré, l'Assemblage possède trois axes de symétrie binaire rectangulaires entre eux.*

Supposons que le rhombe ACDE (*fig. 24*) soit la base du prisme droit générateur; alors, si l'on jette les yeux sur la *fig. 25*, qui représente, sur le plan $z = 0$, 1° le Réseau $z = 0$, dont les Rangées sont figurées par des lignes pleines, et en projection sur ce Réseau, les Réseaux $z = 2j$, ainsi que les Réseaux $z = 2j + 1$, mais ces derniers, dans le cas seulement de la

superposition de toutes les projections; 2° mais, pour le cas de l'alternance seulement, les Réseaux $z = 2j + 1$, figurés par les lignes pointillées ac , cd , de , ae , etc., il deviendra évident que tout plan normal au plan de la figure, et dirigé suivant une des diagonales du rhombe, par exemple suivant la ligne aa' , sera un plan de symétrie pour l'Assemblage, puisque tout est pareil à droite et à gauche de ce plan. Donc la diagonale AD , normale à ce plan, sera un axe binaire du système (théorème LII); on démontrerait de même que la seconde diagonale EC est aussi un axe binaire.

Scolie I. — Dans le cas où a (*fig.* 25) tomberait sur le milieu de AA' , c sur le milieu de AC , d sur le milieu de ED , etc., le théorème précédent ne serait plus applicable, quoique le prisme générateur fût encore un prisme droit à base rhombe.

Scolie II. — Si le triangle principal devient équilatéral, et si, de plus, les Réseaux sont superposés, la symétrie devient sénnaire, et l'Assemblage appartient à une classe spéciale, dont il sera parlé ultérieurement; mais si, dans ce cas, les Réseaux successifs sont alternants, la symétrie générale de l'Assemblage n'est pas modifiée par cette circonstance.

THÉORÈME LVII. — *Si le Réseau normal à l'axe binaire est à maille rectangulaire, l'Assemblage possède trois axes de symétrie binaire rectangulaires entre eux.*

Dans le cas où les Réseaux sont superposés sans alternance, le solide générateur est un parallépipède rectangulaire non centré, et le théorème est évident.

Si les Réseaux sont alternants, il peut se présenter deux cas distincts : ou bien le point a de la *fig.* 24 tombe sur le milieu de l'hypoténuse du triangle principal, alors rectangle, ou bien sur le milieu de l'un des deux petits côtés.

Dans le premier cas, la *fig.* 26 offre la projection des Réseaux alternants sur le plan $z = 0$. Dans ce cas, les plans menés normalement au plan $z = 0$, suivant les droites AC , ac , ED , ..., ainsi que les plans menés suivant AE , ae , CD , ..., sont évidemment des plans de symétrie de l'Assemblage : donc alors les côtés des rectangles sont des axes binaires (théorème LII).

Dans le second cas, la projection est représentée par la *fig.* 27, où $ACDE$

est la maille du Réseau $z = 0$, *acde* celle du Réseau $z = 1$. Dans ce cas encore, les plans menés suivant les côtés des rectangles sont évidemment des plans de symétrie de l'Assemblage. On remarquera que, dans ce dernier cas, on peut adopter pour solide générateur un prisme droit à base rhombe ; il suffit, en effet, de prendre pour base la maille du Réseau rhombique situé dans le plan normal à $z = 0$, et qui a pour trace la droite $AaEe$.

Scolie. — Si le rectangle se changeait en un carré, la symétrie deviendrait quaternaire, et l'Assemblage rentrerait dans une classe particulière, dont nous parlerons bientôt ; cependant, dans le cas de l'alternance correspondant à la *fig.* 27, la symétrie resterait la même.

Définition. — Nous désignerons sous le nom de symétrie *terbinaire* celle qui est caractérisée par trois axes binaires normaux l'un à l'autre. Ces trois axes, quoique de même ordre, sont d'espèces différentes.

THÉORÈME LVIII. — *Dans tout Assemblage à symétrie terbinaire, les plans réticulaires normaux aux axes binaires sont à maille rhombique ou rectangulaire.*

Soient pris les trois axes binaires pour axes des x , des y et des z . Si l'on fait tourner l'Assemblage de 180 degrés autour de l'axe des x , le Réseau $z = 0$ doit recoïncider avec lui-même ; ainsi l'axe des x doit être un axe de symétrie binaire pour le Réseau du plan des xy , ce qui exige (théorème XIV, corollaire II) que sa maille soit rhombe ou rectangulaire. Il en serait de même pour les Réseaux situés sur les plans des xz et des yz .

Corollaire. — Il résulte des théorèmes précédents que tout Assemblage terbinaire rentre dans l'une des quatre catégories suivantes :

- 1°. Prisme droit à base rhombe non centré, ou prisme droit rectangulaire ayant deux de ses faces latérales centrées ;
- 2°. Prisme droit à base rhombe, centré ;
- 3°. Prisme droit rectangulaire, non centré ;
- 4°. Prisme droit rectangulaire, centré.

Dans les cas 2° et 4°, on peut, pour faire dériver l'Assemblage, remplacer le prisme par un octaèdre $ACDEA'A''$ (*fig.* 28), à base rhombe (deuxième cas), ou à base rectangulaire (quatrième cas).

Scolie. — J'ai démontré, dans mon « Mémoire sur les Polyèdres de forme

symétrique », plusieurs théorèmes relatifs à la symétrie binaire. On peut les appliquer aux Assemblages, en ne perdant pas de vue qu'un Sommet quelconque peut être considéré comme étant le centre de symétrie de l'Assemblage, et le lieu de croisement de ses axes et plans de symétrie. Je me bornerai à reproduire ici l'énoncé du théorème suivant (corollaire du théorème XIII de mon Mémoire), dont la démonstration directe n'offrirait d'ailleurs aucune difficulté :

« Lorsqu'il existe deux axes binaires normaux l'un à l'autre, il en existe toujours un troisième normal à leur plan. »

THÉORÈME LIX. — *Les mêmes systèmes de Rangées et de plans réticulaires se retrouvent dans l'Assemblage dérivant du prisme droit centré et dans l'Assemblage dérivant du même prisme droit non centré.*

Le centrage du prisme n'est autre chose que l'intercalation d'un Sommet sur le milieu de l'une de ses quatre diagonales. Si l'on effectue la même intercalation sur tous les prismes de l'Assemblage, en opérant toujours sur la diagonale parallèle à celle primitivement choisie, il est clair que l'on aura un Assemblage doublé, dans lequel, en vertu du théorème LIII, on devra retrouver les mêmes systèmes de Rangées et de plans réticulaires que dans l'Assemblage primitif. Donc, etc.

Symétrie ternaire.

THÉORÈME LX. — *Dans tout Assemblage possédant un axe ternaire, le Réseau des plans réticulaires normaux à l'axe est à maille triéquiangle.*

Soit M (*fig. 11* et *fig. 29*) l'un des Sommets de l'Assemblage, choisi de manière à être aussi voisin que possible de l'axe de symétrie ternaire, sans être cependant sur cet axe. Par M, menons le plan normal à l'axe, et le coupant en O; enfin construisons le triangle équilatéral MNP autour de O comme centre.

Si O est un Sommet de l'Assemblage, le Réseau offrira la configuration représentée *fig. 11* : M', N', P' seront aussi des Sommets, et l'axe de symétrie sera non-seulement un axe ternaire, mais, qui plus est, un axe sénaire. En effet, prenons le plan de la figure (*fig. 11*) pour plan des xy : il est clair que le Réseau des plans $z = 1, z = 2, \dots$, se projettera orthogonalement sur

celui du plan $z=0$; car, en transportant le Réseau $z=0$ sur le plan $z=1$, parallèlement à lui-même, il faut qu'aucun des Sommets de l'hexagone $MM'NN'PP'$ ne se rapproche de l'axe. Dans ces conditions, la droite, menée par O normalement au plan de la figure, sera évidemment un axe sénaire.

Ce cas restant réservé, nous admettrons, dans ce théorème et les suivants relatifs à la *symétrie simplement ternaire*, que le centre O (*fig. 29*) du triangle MNP n'est pas un Sommet de l'Assemblage, ce qui ne veut pas dire cependant que l'axe mené par ce point ne doit contenir aucun Sommet.

Le triangle MNP (*fig. 29*), résultat de la construction indiquée, sera évidemment le triangle principal du Réseau : donc le Réseau sera à maille triéquiangle.

THÉORÈME LXI. — *Dans tout Assemblage à symétrie simplement ternaire, deux plans réticulaires normaux à l'axe ternaire, et séparés par deux plans réticulaires intermédiaires, ont des Réseaux qui se projettent orthogonalement l'un sur l'autre.*

Prenons le plus bas de ces quatre plans pour plan des xy , de sorte que son équation soit $z=0$. Je dis que le Réseau du plan $z=3$ se projettera orthogonalement sur le Réseau $z=0$.

Soit $ABCDEF$ (*fig. 29*) un hexagone régulier dont les sommets appartiennent au Réseau $z=0$, et par le centre O , qui est aussi un Sommet du Réseau, menons sur son plan une normale, qui sera un axe ternaire du système (théorème XLVII). Puis, transportons parallèlement à lui-même le Réseau $z=0$ sur le plan $z=1$. Soit MNP le triangle principal du Réseau $z=1$, triangle dont la surface est percée par la normale élevée en O ; la figure représente la projection orthogonale de ce triangle sur le plan $z=0$.

Si O coïncidait avec la projection de l'un des Sommets M, N, P , les Réseaux se correspondraient dans les plans $z=0, z=1$, et la symétrie serait sénaire.

Ce cas étant exclu, la symétrie ternaire de la normale élevée en O exige que O coïncide avec le centre du triangle MNP ; et, comme ce dernier triangle doit avoir ses côtés parallèles à AB, AO, BO , il n'est susceptible que des deux positions, inverses l'une de l'autre, $MNP, M'N'P'$. Le triangle MNP , dont les sommets coïncident évidemment avec les centres de figure des triangles

AOF, BOC, DOE, peut être considéré comme provenant d'une translation, sans rotation, de AOB, ou de COD, ou de EOF. Le triangle $M'N'P'$, dont les sommets sont les centres de figure de DOC, EOF, AOB, proviendrait de la translation de l'un des triangles BOC, DOE, FOA.

Supposons donc que le Réseau $z = 1$ soit, en projection, le Réseau à lignes interrompues MNP... de la figure. Alors, dans le losange AOFG, la grande diagonale OG devra passer par M, et l'on aura, par des propriétés connues du triangle équilatéral, $OM = \frac{1}{3}OG$. Si donc on joint le Sommet O au Sommet situé sur le plan $z = 1$, et qui a M pour projection, Sommet que je nommerai M , (et qui n'est point indiqué sur la figure), l'oblique OM, sera l'origine d'une Rangée de paramètre OM. En prenant sur cette Rangée une longueur $OG = 3 OM$, le Sommet G, (qui n'est point marqué sur la figure) devra évidemment avoir sa projection en G, et, de plus, il appartiendra au plan $z = 3$. D'où l'on voit que le Réseau $z = 3$ se projette sur le Réseau $z = 0$.

Deuxième démonstration. — Soit $OO'O''O'''$ (fig. 30) l'axe ternaire passant par le Sommet O qui est censé appartenir au plan $z = 0$; cet axe est coupé en O' , O'' par les plans $z = 1$, $z = 2$, et au point O''' par le plan $z = 3$. Le triangle équilatéral $M'N'P'$ de la figure est la maille triangulaire du Réseau du plan $z = 1$, et il a son centre en O' sur l'axe ternaire.

Par l'axe OO''' et par l'un des trois Sommets M' , N' , P' , par exemple par M' , menons le plan $M'OO'm'$ qui coupera $N'P'$ en son milieu m' et sera perpendiculaire à cette ligne. Sur OP' , ON' , comme côtés, construisons le rhombe $ON'P'M''$ dont le quatrième Sommet M'' appartiendra à l'Assemblage, sera situé dans le plan $z = 2$, et sera, en outre, évidemment contenu dans le plan $M'OO'm'$.

On aura alors

$$\begin{aligned} M''O'' &= 2 O'm' = M'O', \\ O'''O'' &= OO', \\ OO'M' &= 90^\circ = O'''O''M''. \end{aligned}$$

Donc les triangles $OO'M'$ et $O'''O''M''$ sont égaux : donc $M''O''$ est égal et parallèle à OM' ; ainsi O''' est aussi un Sommet de l'Assemblage (théorème XXX). Donc les Sommets du Réseau $z = 3$ se projettent orthogonalement sur ceux du Réseau $z = 0$.

Scolie. — On voit facilement que le Réseau pointillé $M'N'P'...$ (*fig.* 29) sera la projection orthogonale du Réseau du plan $z = 2$.

Si, au contraire, le Réseau $M'N'P'...$ avait été la projection orthogonale du Réseau $z = 1$, alors $MNP...$ eût été celle du Réseau $z = 2$.

Corollaire. — Si, sur la Rangée OG_3 , l'on supprime le Sommet M_1 , ainsi que celui qui vient après M_1 sur la même Rangée, et si l'on fait la même opération sur tout le système des Rangées parallèles à OG_3 , et qui partent des Sommets du Réseau $z = 0$, on changera l'Assemblage ternaire en un Assemblage sénaire qui aura pour noyau un prisme droit à base rhombe de 60 et 120 degrés. Réciproquement, on passera de l'Assemblage sénaire à l'Assemblage ternaire correspondant, trois fois plus riche en Sommets, en intercalant deux nouveaux Sommets sur chaque paramètre d'un système de Rangées parallèles à l'une des deux grandes diagonales du prisme générateur à base rhombe.

Mais il importe de remarquer que l'on obtient ainsi deux Assemblages distincts, selon que l'on a choisi l'une ou l'autre des deux diagonales; ces Assemblages ont la propriété de coïncider, lorsque l'on fait tourner l'un d'eux de 180 degrés autour de l'axe ternaire. Ainsi, d'un même Assemblage sénaire peuvent dériver deux Assemblages ternaires, distincts par leur situation dans l'espace, un Assemblage ternaire *direct* et un Assemblage ternaire *inverse*.

THÉORÈME LXII. — *Tout Assemblage à symétrie simplement ternaire a pour noyau un rhomboèdre.*

Reprenons la *fig.* 30 et la deuxième démonstration du théorème précédent. Faisons tourner de 120 degrés autour de OO''' le parallélogramme $OM'O'''M''$: le Sommet M' viendra se substituer successivement à N' et à P' ; le Sommet M'' viendra se substituer à N'' et à P'' . Or, de même que les quatre Sommets O, N', P', M'' forment un rhombe plan, $OM'N'P'', OM'P'N''$ seront aussi des rhombes plans égaux au précédent, et il est visible qu'il en sera de même des trois faces supérieures.

Le solide ainsi obtenu sera donc un rhomboèdre, et comme il ne renferme aucun Sommet de l'Assemblage, ni dans son intérieur, ni sur ses

faces ou arêtes, il pourra être considéré comme étant le parallépipède générateur ou noyau de l'Assemblage.

Corollaire. — On peut aussi faire dériver l'Assemblage de l'un des tétraèdres élémentaires $OM'N'P'$, $O''M''N''P''$ (fig. 30): les quatre sommets suffisent pour fixer complètement le système entier de l'Assemblage; mais ce tétraèdre n'est point un solide générateur proprement dit.

THÉORÈME LXIII. — *Tout Assemblage à symétrie ternaire possède trois plans de symétrie passant par l'axe et perpendiculaires aux trois directions des côtés du triangle principal du Réseau des plans normaux à l'axe.*

La fig. 29 représente en projection orthogonale les trois Réseaux des plans $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$; tous les autres Réseaux des plans $z = p$ se projettent sur les précédents, les Réseaux de la forme $z = 3j$ sur le Réseau $z = 0$, ceux de la forme $z = 3j + 1$ sur le Réseau $z = 1$, ceux de la forme $z = 3j + 2$ sur le Réseau $z = 2$. Soit menée par O la droite OMG normale au côté AF , et par cette droite un plan normal au plan de la figure. Ce plan sera évidemment un plan de symétrie pour chacun des trois Réseaux; il sera donc un plan de symétrie de l'Assemblage.

De même, les plans menés par O normalement aux côtés AB , BC seraient aussi des plans de symétrie; d'ailleurs la symétrie ternaire exige que ces plans soient au nombre de trois. Donc, etc.

Les plans menés par O , normalement au plan de la figure, et parallèlement aux côtés, ne sont pas des plans de symétrie de l'Assemblage.

Scolie. — Les cristallographes désignent sous le nom de *section principale du rhomboèdre*, tout plan tel que $OM'm''O''M''m'$ (fig. 30) qui passe par l'axe géométrique du rhomboèdre et par deux de ses six sommets latéraux, tels que M' et M'' : OO'' est dit l'*axe du rhomboèdre*.

On voit, d'après cela, que les trois sections principales du rhomboèdre servant de noyau à un Assemblage ternaire sont des plans de symétrie pour cet Assemblage.

THÉORÈME LXIV. — *Dans les Assemblages à symétrie ternaire, tout côté de la maille triéquiangle d'un Réseau normal à l'axe ternaire est un axe binaire de l'Assemblage.*

C'est une conséquence évidente des théorèmes LII et LXIII. On le

voit, d'ailleurs, clairement sur la *fig.* 29, en considérant le Réseau MNP comme appartenant au plan $z = 1$, et le Réseau M'N'P' comme appartenant au plan $z = -1$. Alors, après une rotation de 180 degrés autour de la droite AOD, M vient en P', P en M', etc.; de sorte que le Réseau $z = 1$ prend la place du Réseau $z = -1$, et *vice versa*. De même, les Réseaux $z = p$ et $z = -p$ se substitueraient l'un à l'autre; donc AOD est un axe binaire.

Symétrie quaternaire.

THÉOREME LXV. — *Dans tout Assemblage à axe de symétrie quaternaire, le Réseau des plans réticulaires normaux à l'axe quaternaire est à maille carrée.*

Soit M (*fig.* 31) l'un des Sommets de l'Assemblage placé à la distance minimum de l'axe quaternaire, mais hors de cet axe. De M menons un plan normal à l'axe, et qui le coupe au point O; puis, dans le cercle de centre O et de rayon OM, inscrivons un carré MM'M''M''' dont M soit un des sommets: les quatre points M, M', M'', M''' appartiendront au Réseau de ce plan. Alors, si le point O est l'un des Sommets de l'Assemblage, le Réseau aura pour parallélogramme générateur le carré OMmM', et le carré MM'M''M''', dans le cas contraire.

THÉOREME LXVI. — *Tout Assemblage à axe de symétrie quaternaire dérive du prisme droit à base carrée, centré ou non centré.*

L'axe quaternaire possédant évidemment toutes les propriétés d'un axe binaire, le noyau de l'Assemblage sera un prisme droit à base parallélogrammique, centré ou non centré (théorème LV).

Si le prisme n'est pas centré, tous les Réseaux des plans $z = p$ se projeteront sur celui du plan $z = 0$ normal à l'axe quaternaire, et il en résultera, en projection orthogonale, la disposition indiquée par la *fig.* 32.

Si le prisme est centré, les Réseaux des plans $z = 2j$ se projeteront encore sur le Réseau à maille carrée $z = 0$; mais, quant aux plans $z = 2j + 1$, la projection de leurs Sommets se fera (*fig.* 32) sur le milieu de l'un des trois côtés du triangle principal ABC (théorème LV, scolie I): or elle ne peut se faire ni sur O', ni sur O''; car le prisme droit élevé sur le carré ABCD, comme base, aurait deux de ses faces latérales centrées, et les deux

autres non centrées, résultat évidemment incompatible avec la symétrie des axes quaternaires menés par les Sommets A, B, C, D. Donc la projection du Réseau $z = 1$ se fera en O, c'est-à-dire sur les centres des carrés du Réseau $z = 0$, comme l'indique la *fig.* 33.

Corollaire I. — Le théorème LIII peut être appliqué aux Assemblages quaternaires. Les mêmes systèmes de Rangées et de plans réticulaires se retrouvent dans l'Assemblage dérivant du prisme droit centré et dans l'Assemblage dédoublé que l'on obtient en supprimant les Sommets placés aux centres des prismes.

Corollaire II. — On peut substituer au prisme droit centré à base carrée l'octaèdre à base carrée de la *fig.* 28; toutefois ce solide n'est pas un solide générateur de l'Assemblage.

THÉORÈME LXVII. — *Dans le cas du prisme droit à base carrée, non centré, les quatre arêtes latérales sont des axes de symétrie quaternaire : les parallèles à ces axes menées par les centres des bases carrées sont aussi des axes quaternaires; mais ces axes sont du genre de ceux que nous avons nommés axes intermédiaires, et ne renferment aucun des Sommets de l'Assemblage.*

THÉORÈME LXVIII. — *Dans le cas du prisme droit centré à base carrée, tous les axes de symétrie quaternaire sont des Rangées, et ont pour paramètre la hauteur du prisme.*

THÉORÈME LXIX. — *Dans tout Assemblage quaternaire, il existe des plans de symétrie passant par l'axe, et dirigés, les uns suivant les côtés, les autres suivant les diagonales du carré générateur du Réseau normal à l'axe quaternaire.*

Corollaire. — Chaque côté et chaque diagonale du carré générateur du Réseau normal à l'axe quaternaire sont des axes binaires de l'Assemblage (théorème LII).

Définitions. — Les axes parallèles aux côtés des carrés seront dits axes binaires de première espèce; les axes parallèles aux diagonales de ces carrés seront dits axes binaires de deuxième espèce. Les premiers ont le côté du carré, et les autres la diagonale du même carré, pour paramètre.

Ces quatre systèmes d'axes se coupent sous des angles de 45 degrés et de 90 degrés.

Ces divers énoncés n'exigent aucune démonstration.

Symétrie sénnaire.

THÉORÈME LXX. — *Dans tout Assemblage à axe sénnaire, le Réseau des plans normaux à l'axe est à maille triéquiangle, et les divers Réseaux de ces plans se projettent orthogonalement les uns sur les autres.*

Soit M (*fig. 11*) l'un des Sommets, pris hors de l'axe, au minimum de distance. Menons par M un plan normal à l'axe, et qui le coupe au point O. Soit construit alors l'hexagone régulier MM' NN' PP' ayant son centre en O. Chacun de ses sommets sera un Sommet de l'Assemblage, et il en sera de même du centre O. Ce plan étant pris pour plan des xy , son équation sera $z = 0$.

Sur les plans réticulaires $z = 1$, $z = 2, \dots$, la même démonstration est applicable; l'intersection de chacun de ces plans avec l'axe sera aussi un Sommet. Donc les Réseaux de ces plans coïncident, en projection orthogonale, avec le Réseau du plan $z = 0$. D'ailleurs il est évident que ces Réseaux sont à maille triéquiangle.

Corollaire. — L'axe sénnaire est une des Rangées de l'Assemblage, et cette Rangée est conjuguée avec son plan normal.

THÉORÈME LXXI. — *Tout Assemblage à axe de symétrie sénnaire dérive d'un prisme droit à base triéquiangle.*

C'est une conséquence du corollaire précédent. Si sur le rhombe OMM'N (*fig. 11*) on élève un prisme droit ayant pour hauteur l'intervalle qui sépare le plan $z = 0$ du plan $z = 1$, ce solide sera le parallélipède générateur de l'Assemblage, puisque OM et ON sont deux Rangées conjuguées du Réseau du plan OMM'N.

Le prisme droit de même hauteur et de base triangulaire OMM' peut aussi être pris pour solide générateur de l'Assemblage.

Corollaires. — Toutes les Rangées parallèles à l'axe sénnaire sont aussi des axes sénaires.

Toute parallèle à l'axe sénnaire menée par le centre de l'un des triangles équiangles du Réseau normal à l'axe est un axe intermédiaire, dont la symétrie est ternaire.

Toute parallèle à l'axe sénnaire menée par le milieu de l'un des côtés des triangles équiangles du Réseau $z = 0$ est aussi un axe intermédiaire, mais de symétrie binaire.

Tous les plans réticulaires normaux à l'axe sénnaire sont des plans de symétrie.

Tous les plans réticulaires passant par l'axe sénnaire et parallèles aux côtés des triangles du Réseau $z = 0$ sont des plans de symétrie; il y a trois systèmes distincts de tels plans.

Tous les plans réticulaires passant par l'axe sénnaire et perpendiculaires aux côtés des triangles du Réseau $z = 0$ sont aussi des plans de symétrie; il y a trois systèmes distincts de tels plans.

Dans chacun des triangles équiangles du Réseau $z = 0$, chaque côté est un axe de symétrie binaire de l'Assemblage; il y a trois systèmes de tels axes, et ces axes sont de même espèce.

Dans ces mêmes triangles, chaque normale à un côté menée par le sommet opposé est aussi un axe de symétrie binaire; il y a trois systèmes de tels axes: ces axes sont de même espèce entre eux, mais d'espèce différente de celle des précédents.

Définitions. — Les axes parallèles aux côtés seront dits axes binaires de première espèce; les axes perpendiculaires aux côtés, et dont le paramètre est la grande diagonale du rhombe générateur du Réseau $z = 0$, seront dits axes binaires de deuxième espèce.

Ces six systèmes d'axes se coupent entre eux sous des angles de 30° , 60° et 90° .

THÉORÈME LXXII. — *Si, dans un Assemblage à symétrie simplement ternaire, on supprime, parmi les Réseaux des plans réticulaires normaux à l'axe, ceux qui ont un numéro d'ordre non divisible par 3, on obtient un Assemblage à symétrie sénnaire: toutes les Rangées et plans réticulaires de l'Assemblage primitif se retrouvent dans le nouvel Assemblage.*

La première partie de la proposition énoncée a déjà été démontrée (théorème LXI, corollaire); la suppression indiquée revient à annuler

deux Sommets sur trois, sur chacune des grandes diagonales des prismes droits générateurs à base rhombe. Or nous avons vu (théorème LIII) que l'intercalation de nouveaux Sommets, ou la suppression des Sommets intercalés, dans un système de Rangées parallèles, n'altère pas les divers systèmes de Rangées ou de plans réticulaires, du moins quant à la direction de ces systèmes.

La suppression des plans à indice non multiple de 3 modifie les systèmes de Rangées, soit en rendant leur densité trois fois moindre, soit en rendant leur paramètre trois fois plus grand. Elle modifie les systèmes de plans réticulaires, soit en triplant l'épaisseur des strates, soit en triplant l'aire de la maille génératrice des Réseaux de ces plans.

Symétrie terquaternaire.

Les énoncés des théorèmes qui vont suivre, et la définition de la page 86, indiqueront ce que l'on doit entendre par la *symétrie terquaternaire*.

THÉORÈME LXXIII. — *Lorsqu'un Assemblage possède deux axes de symétrie ternaire non parallèles, il en possède quatre, disposés comme le sont les quatre grandes diagonales d'un cube, c'est-à-dire se coupant sous l'angle $70^{\circ} 31' 44''$ dont le cosinus est égal à $\frac{1}{3}$, et il ne peut en posséder un plus grand nombre.*

Soient OA et OB (*fig. 34*) les deux axes de symétrie donnés partant d'un même Sommet O, et prolongeons-les jusqu'à la rencontre d'une surface sphérique de centre O et de rayon égal à 1. Menons l'arc de grand cercle AB, et faisons tourner le système OAB de 120 degrés autour de OB, jusqu'à ce qu'il arrive en OCB, puis de 120 degrés autour de OC, etc.; nous arriverons facilement par cette voie à démontrer que les axes ternaires sont assemblés, ou bien comme les quatre diagonales d'un cube, ou bien comme les dix diagonales d'un dodécaèdre régulier; mais si l'on nomme ω (*fig. 34*) le centre du polygone régulier sphérique ABCD... ainsi obtenu, O ω devra être aussi un axe de symétrie tel, que la restitution des Sommets s'opère après une rotation égale à l'angle A ω C, autour de O ω ; or, dans le cas du dodécaèdre régulier, on aurait

$$A\omega C = 144^{\circ},$$

angle qui ne peut jamais (*voyez* le corollaire du théorème XLVI) produire la restitution des lieux des Sommets : donc le cas de dix axes ternaires assemblés comme les diagonales d'un dodécaèdre régulier doit être exclu ; donc, etc.

Ceux de nos lecteurs qui désireraient une démonstration plus développée de ce théorème, la trouveront dans mon « Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique ». Je me borne à rappeler que j'ai démontré dans ce Mémoire :

1°. Que lorsqu'il existe dans un polyèdre deux axes d'ordre supérieur au deuxième, le polyèdre est *sphéroédrique* (théorème XL de mon Mémoire) ;

2°. Qu'il existe deux groupes de polyèdres *sphéroédriques*, les *quaterternaires*, ayant quatre axes ternaires assemblés comme le sont les quatre diagonales d'un cube, et les *décemternaires*, ayant dix axes ternaires assemblés comme le sont les dix diagonales d'un dodécaèdre régulier (corollaire du théorème XLIII, même Mémoire) ;

3°. Que les polyèdres *décemternaires* ont en même temps dix axes quinaires (théorème LII, même Mémoire).

Comme les Assemblages ne peuvent jamais posséder d'axes quinaires, ils ne peuvent, par conséquent, avoir dix axes ternaires.

De là résulte clairement que tout Assemblage qui a deux axes ternaires rentre dans la catégorie des polyèdres *quaterternaires*, et même dans la catégorie spéciale des polyèdres *quaterternaires* à centre de symétrie, puisque chaque Sommet d'un Assemblage peut être pris pour son centre de symétrie. Ainsi le théorème actuel est complètement démontré.

THÉORÈME LXXIV. — *Le plan de jonction de deux axes ternaires non parallèles est un plan de symétrie de l'Assemblage.*

Soient OA (*fig.* 35) l'un de ces axes, et OB le second axe : du Sommet O, et d'un rayon OA égal à 1, décrivez une surface sphérique ; menez l'arc de grand cercle AB, et les arcs de grand cercle AC, AD, tels, que l'on ait

$$\text{BAC} = 120^\circ, \quad \text{BAD} = 120^\circ, \quad \text{AC} = \text{AD} = \text{AB}.$$

Par OA passent trois plans de symétrie (théorème LXIII) qui couperont la sphère suivant trois grands cercles. Si ces plans n'étaient pas dirigés

suivant AB, AC, AD, ils le seraient suivant Ab, Ac, Ad ; B, C, D auraient des homologues en B', C', D' : ainsi non-seulement OB, OC, OD seraient des axes ternaires; mais il en serait de même de OB', OC', OD' , ce qui est contraire au théorème précédent. Donc OAB, OAC, OAD sont des plans de symétrie; ce sont, de plus, les trois sections principales du rhomboèdre générateur dont l'axe est dirigé suivant OA.

THÉOREME LXXV. — *Les bissectrices des angles $70^{\circ} 31' 44''$, $109^{\circ} 28' 16''$, que forment entre eux deux axes ternaires, sont des axes de symétrie pour le Réseau du plan réticulaire qui unit ces deux axes.*

La démonstration de ce théorème se déduit facilement des principes exposés dans mon « Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique » : car il en résulte que la bissectrice de l'angle obtus ($109^{\circ} 28' 16''$) de deux axes ternaires d'un polyèdre quaterternaire est toujours un axe de symétrie binaire ou quaternaire du polyèdre (théorème XLIV de ce Mémoire); donc cette bissectrice est un axe de symétrie pour les Réseaux de tous les plans réticulaires qui passent par cette droite. La bissectrice de l'angle aigu des deux axes ternaires sera donc aussi un axe de symétrie du Réseau de leur plan (théorème XII).

PROBLÈME XXIX. — *Trouver les Assemblages qui possèdent quatre axes de symétrie ternaire.*

Dans un Assemblage quelconque à noyau rhomboédrique, soit OO' (fig. 36) l'axe ternaire, de paramètre OO' ; O, O' sont deux Sommets, et l'une des trois sections principales est prise pour plan de la figure. Soit $AOA'O'$ cette section principale : si par les Sommets O, A, A' , O' on imagine des plans GOH, AmB , $A'm'B'$, $G'O'H'$ normaux à l'axe, ces plans pourront être considérés comme ayant pour équations

$$z = 0, \quad z = 1, \quad z = 2, \quad z = 3;$$

ils divisent donc le paramètre de l'axe OO' en trois parties égales.

Maintenant nommons

μ l'angle du rhomboèdre, c'est-à-dire l'angle que forment entre elles deux faces de ce rhomboèdre passant toutes les deux par O, ou toutes les deux par O' ;

a le paramètre des axes binaires de l'Assemblage, c'est-à-dire la longueur des côtés du triangle équiangle formant la maille du Réseau des plans $z = 0, z = 1, \dots$;

d le paramètre de l'axe ternaire, c'est-à-dire la longueur OO' .

Il est aisé de voir que l'on a, quel que soit l'angle μ du rhomboèdre,

$$\begin{aligned} Am = A'm' &= \sqrt{\frac{1}{3}} a, \\ Om = mm' &= O'm' = \frac{1}{3} d; \end{aligned}$$

l'angle μ dépend du rapport existant entre les paramètres a et d , et l'on trouve facilement que cette dépendance est exprimée par la formule

$$(62) \quad \text{tang}^2 \frac{1}{2} \mu = \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{3}.$$

Ces préliminaires, qui s'appliquent à tous les Assemblages ternaires, étant posés, cherchons la condition pour que l'Assemblage possède quatre axes ternaires.

Prenons pour plan de la figure le plan de jonction de OO' avec le deuxième axe ternaire, qui sera OA . On sait: 1° que ce plan sera l'une des trois sections principales du rhomboèdre à axe OO' (théorème LXXIV); 2° que l'on doit avoir

$$\cos mOA = \frac{1}{3} \text{ (théorème LXXIII),}$$

d'où il résulte que l'on a

$$OA = 3Om = OO';$$

3° que la bissectrice OM de l'angle AOO' est un axe de symétrie du Réseau du plan de la figure (théorème LXXV).

D'où l'on voit que, si l'on mène AM parallèle à OO' , $O'M$ parallèle à OA , la figure $OAMO'$ sera un rhombe dont les quatre sommets seront des Sommets appartenant au Réseau du plan de la figure, et dont les diagonales OM , AO' seront des axes de symétrie du Réseau (théorème LXXV). Si maintenant on partage OA en trois parties égales $On, nn', n'A$, les plans normaux à OA , passant par O, n, n', A , viendront couper la bissectrice OM en C, B', N . Comme les Sommets de notre Réseau ne peuvent se rencontrer, d'une part, que sur le système des Rangées $G'O'H', A'm'B', BmA$, d'autre part,

que sur le système des Rangées APN, $n'RB'Q$, nCO' , ces Sommets ne doivent être cherchés que sur les points d'intersection de ces droites. Mais d'abord il est évident que les quatre points R, P, Q, D' ne peuvent appartenir à l'Assemblage; car, si le point D' était dans ce cas, en le faisant tourner de 120 degrés autour de OO', il viendrait en un lieu de l'espace tel, qu'il aurait u pour projection sur le plan de la figure, et serait situé dans l'intérieur de la strate comprise entre les deux plans menés par O et n normalement à OA, ce qui est évidemment impossible. Donc les points C, B', N peuvent seuls être des Sommets, dans l'intérieur du rhombe OAMO'. Donc le nombre des solutions se réduit à trois, le paramètre de la Rangée OCB'M étant nécessairement égal à OM, ou à $OB' = \frac{1}{2} OM$, ou à $OC = \frac{1}{4} OM$.

Première solution. — *Le paramètre de la Rangée bissectrice est égal à OM.* Le parallélogramme AOA'O' est alors la section principale du rhomboèdre ayant OO' pour axe.

Ce rhomboèdre est complètement déterminé par l'équation

$$\overline{Am}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{Om}^2 = \frac{8}{9} d^2,$$

d'où l'on tire

$$a^2 = 3 \overline{Am}^2 = \frac{8}{3} d^2,$$

$$\tan^2 \frac{1}{2} \mu = 3, \quad \mu = 120^\circ.$$

L'Assemblage dépendant du rhomboèdre de 120 degrés auquel nous sommes ainsi conduits, peut être obtenu en centrant tous les cubes d'un Assemblage à noyau cubique. En effet, le point O peut être considéré comme étant le plus bas Sommet d'un cube dont le centre serait en O' et le Sommet supérieur en O''; le parallélogramme OA'O''M serait sa section principale suivant la diagonale OO''; le Sommet A serait le centre de l'un des six cubes qui se juxtaposent à OA'O''M suivant chacune de ses faces.

Deuxième solution. — *Le paramètre de la Rangée bissectrice est égal à OB'.* Le rectangle OB'O'B est alors la section principale du rhomboèdre qui a OO' pour axe. L'arête O'B' du rhomboèdre étant normale à la face qui a O'B pour trace, on voit que le rhomboèdre correspondant est un

cube. On déduirait aussi ce résultat des formules

$$a^2 = 3 \overline{Bm}^2 = \frac{3}{4} \overline{Am}^2 = \frac{2}{3} d^2, \\ \text{tang}^2 \frac{1}{2} \mu = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1, \quad \mu = 90^\circ.$$

Troisième solution. — *Le paramètre de la Rangée bissectrice est égal à OC.* Dans ce cas, O, C, B', N, M sont des Sommets de l'Assemblage. La section principale est OCO'C'. On a, alors,

$$a^2 = 3 \overline{Cm}^2 = \frac{3}{4} \overline{Bm}^2 = \frac{1}{6} d^2, \\ \text{tang}^2 \frac{1}{2} \mu = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad \mu = 70^\circ 31' 44''.$$

D'après la valeur, $70^\circ 31' 44''$, de l'angle dièdre du rhomboèdre générateur, on reconnaît qu'il se termine supérieurement et inférieurement par deux tétraèdres réguliers. On a, d'ailleurs,

$$\overline{OC}^2 = \overline{Om}^2 + \overline{Cm}^2 = \frac{1}{9} d^2 + \frac{1}{18} d^2 = \frac{1}{6} d^2 = a^2,$$

ce qui prouve bien que les trois faces latérales de ce tétraèdre sont des triangles équilatéraux.

Les Sommets C, C' occupent les centres de deux des faces du cube à section principale OBO'B'; les quatre Sommets qui se projettent orthogonalement en D et D', sur le plan de la figure, occupent les centres des quatre autres faces du même cube. Ainsi l'Assemblage actuel peut être considéré comme dérivant d'un cube ayant ses six faces centrées.

En résumé, le cube, le rhomboèdre de 120 degrés (rhomboèdre tangent extérieurement au cube, suivant le langage des cristallographes), et le rhomboèdre de $70^\circ 31' 44''$ (rhomboèdre tangent intérieurement au cube), sont les seuls rhomboèdres qui puissent servir de noyau à un Assemblage possédant quatre axes ternaires.

THÉORÈME LXXVI. — *Les Assemblages qui possèdent quatre axes ternaires possèdent aussi trois axes quaternaires.*

On peut substituer aux trois rhomboèdres que nous venons d'obtenir le cube centré, le cube non centré et le cube à six faces centrées. Or chacun de ces solides possède évidemment trois axes quaternaires; ce sont les lignes

qui joignent deux à deux les centres des faces opposées de ces cubes. Ces axes quaternaires sont rectangulaires entre eux.

THÉORÈME LXXVII. — *Lorsqu'il existe deux axes de symétrie quaternaire, il en existe trois assemblés rectangulairement, et il ne peut en exister un plus grand nombre.*

Ce théorème se démontrerait comme le théorème LXXIII. Les intersections des axes avec la sphère de rayon 1 forment un système de six points répartis de manière à figurer les sommets d'un octaèdre régulier inscrit; donc, etc.

C'est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème XLI de mon « Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique ».

PROBLÈME XXX. — *Trouver les Assemblages qui possèdent trois axes quaternaires.*

Le solide générateur de tout Assemblage à un axe quaternaire est un prisme droit à base carrée, centré ou non centré (théorème LXVI). Soit donc OACB (*fig. 37*) la base de ce prisme, O, A, C, B étant des Sommets de l'Assemblage.

Soient a le paramètre des Rangées dirigées suivant les côtés de ce carré, d le paramètre des Rangées normales à son plan.

Les deux axes quaternaires qui restent disponibles sont nécessairement situés dans le plan OACB (théorème LXXVII); ils sont donc dirigés suivant OA, OB, ou suivant OC, GOE; sans cela, la symétrie binaire que possèdent ces dernières lignes (théorème LXIX, corollaire) doublerait le nombre des axes quaternaires, ce qui serait contraire au théorème LXXVII. De là résultent les trois solutions suivantes :

Première solution. — Si le prisme n'est pas centré, les axes situés dans le plan de la figure ne peuvent être OC et GOE; car une rotation de 90 degrés autour de OC amènerait A dans l'intérieur du prisme indéfini qui a OACB pour base, et qui doit rester vide de tout Sommet dans son intérieur: mais l'on peut prendre OA, OB pour axes quaternaires, et, en faisant tourner OACB de 90 degrés autour de OA, on voit que l'on aura

$$d = a.$$

Ainsi, dans ce cas, le solide générateur est un cube non centré.

Deuxième solution. — Si le prisme est centré, soit D son centre (que l'on n'a point marqué sur la figure), se projetant orthogonalement en d sur le centre du carré OACB.

Si les axes quaternaires disponibles sont alors dirigés suivant OA, OB, une rotation de OACB autour de OA, égale à 90 degrés, fera voir que l'on a, comme précédemment,

$$a = d.$$

Le point D occupera le centre du cube ayant OACB pour base; le solide générateur est alors un cube centré.

Troisième solution. — Enfin, si les axes quaternaires disponibles sont OC et GOE, en effectuant une rotation de 90 degrés autour de OC, on voit que A viendra en D; d'où l'on déduit

$$Dd = Ad = a\sqrt{\frac{1}{2}},$$

et, en doublant cette hauteur, on aura la hauteur du prisme générateur, savoir,

$$d = a\sqrt{2}.$$

Mais, si l'on prend alors le carré OCFE pour base, le prisme se change évidemment en un cube centré sur ses six faces.

Corollaire. — Les trois genres d'Assemblages que fournit la solution du problème XXX coïncident avec les trois genres d'Assemblages que fournit la solution du problème XXIX.

Il en résulte que les Assemblages qui possèdent trois axes de symétrie quaternaire possèdent quatre axes de symétrie ternaire, et *vice versa*.

THÉORÈME LXXVIII. — *Tout Assemblage qui possède en même temps un axe ternaire et un axe quaternaire, possède trois axes quaternaires et quatre axes ternaires.*

Les trois axes quaternaires sont une conséquence de la symétrie propre à l'axe ternaire donné; l'Assemblage possède donc aussi quatre axes ternaires (corollaire précédent).

Définition. — Nous nommerons dorénavant Assemblages *terquaternaires* les trois genres d'Assemblages dont nous venons de constater l'existence, et

qui possèdent en même temps trois axes quaternaires et quatre axes ternaires. La symétrie qui caractérise ces Assemblages sera dite *symétrie terquaternaire*. La présence simultanée de deux de ces sept axes suffit pour constater la symétrie terquaternaire.

THÉORÈME LXXIX. — *Tout Assemblage terquaternaire possède six axes binaires qui bissectent les angles droits que forment les axes quaternaires combinés deux à deux.*

Soient $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ (fig. 42) trois axes quaternaires se coupant au Sommet O; la symétrie de l'axe quaternaire Oz exige que les deux bissectrices des angles xOy , $x'Oy$ soient des axes binaires (théorème LXIX, corollaire). Il en serait de même pour les quatre autres bissectrices.

THÉORÈME LXXX. — *Tout Assemblage terquaternaire possède trois plans de symétrie joignant deux à deux les axes quaternaires, et six autres plans de symétrie joignant deux à deux les axes ternaires, mais d'autre espèce que les trois précédents.*

La présence des trois axes quaternaires exige que les plans réticulaires normaux à ces axes soient des plans de symétrie de l'Assemblage (théorème LII). Les six axes binaires nécessitent de même six plans de symétrie qui leur soient normaux; du reste, on a déjà vu (théorème LXXIV) que le plan de jonction de deux axes ternaires était un plan de symétrie: un tel plan est évidemment normal à l'un des six axes binaires du système.

Scolie. — Pour se figurer la position mutuelle de ces axes et plans, on peut considérer un cube dont le centre coïncide avec leur point de concours. Les quatre diagonales du cube sont les axes ternaires; les trois droites, joignant deux à deux les centres des faces opposées, sont les axes quaternaires; les six droites, joignant deux à deux les milieux des arêtes opposées, sont les axes binaires; les plans menés par le centre parallèlement aux faces sont les trois plans de symétrie *de première espèce*; les plans menés par deux arêtes opposées sont les six plans de symétrie *de seconde espèce*.

On peut également diviser la surface de la sphère en huit triangles tri-rectangles, au moyen de trois grands cercles: les sommets Q, Q', Q'',..., de ces triangles sont alors des extrémités d'axes quaternaires; les centres

T, T', T'', ..., de ces mêmes triangles sont des extrémités d'axes ternaires, et les milieux B, B', B'', ..., de leurs côtés sont des extrémités d'axes binaires.

On a, en se bornant à considérer les plus petits des angles formés par ces axes, et en nommant O le centre de la sphère, les relations angulaires suivantes :

$$\begin{aligned} \text{QOQ}' &= 90^\circ, & \text{QOT} &= 54^\circ 44' 8'', \\ \text{TOT}' &= 70^\circ 31' 44'', & \text{QOB} &= 45^\circ, \\ \text{BOB}' &= 60^\circ, & \text{TOB} &= 35^\circ 15' 52''. \end{aligned}$$

THÉORÈME LXXXI. — *S'il existe dans un Assemblage un axe de symétrie sénaire, il ne peut y exister aucun autre axe que des axes binaires situés dans le plan normal à cet axe.*

Et d'abord il ne peut exister simultanément deux axes sénaires, puisqu'il n'existe aucun polyèdre régulier dont les angles plans s'assemblent six par six à chaque sommet (*voyez les démonstrations des théorèmes LXXIII et LXXVII, ou mieux encore le théorème XLI de mon « Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique »*).

S'il existait dans l'Assemblage un axe ternaire ou quaternaire, ou même un axe binaire oblique à l'axe sénaire, la symétrie propre à cet axe forcerait l'axe sénaire à se répéter, et il y aurait au moins deux axes sénaires dans l'Assemblage, ce qui n'est pas possible, d'après la remarque précédente.

Classification des Assemblages symétriques.

Au point de vue de leur symétrie, on peut distinguer sept classes d'Assemblages que je désigne de la manière suivante :

Première classe. — Assemblages terquaternaires. Trois axes quaternaires, quatre axes ternaires et six axes binaires, disposés comme le sont les lignes joignant deux à deux, dans un cube, les centres des faces opposées, les sommets opposés et les milieux des arêtes opposées. Trois plans de symétrie normaux aux axes quaternaires; six plans de symétrie normaux aux axes binaires.

Trois modes d'arrangement distincts :

1°. Le cube;

2°. Le cube centré, que l'on peut remplacer par le rhomboèdre de 120 degrés;

3°. Le cube à faces centrées, que l'on peut remplacer par le rhomboèdre de $70^{\circ}31'44''$, ou par le prisme centré, à base carrée, dont la hauteur égale le côté de la base multiplié par $\sqrt{2}$. Le tétraèdre régulier et l'octaèdre régulier peuvent aussi servir à la dérivation de ce troisième mode.

Deuxième classe. — Assemblages sénaires. Un axe sénaire normal à un plan réticulaire dont le Réseau est à maille triéquiangle; trois axes binaires de première espèce, parallèles aux côtés du triangle principal; trois axes binaires de deuxième espèce, parallèles aux hauteurs.

Un plan de symétrie normal à l'axe sénaire; trois plans de symétrie de même espèce, normaux aux axes binaires de la première espèce; trois plans de symétrie d'une autre espèce, normaux aux axes binaires de la deuxième espèce.

Un seul mode d'arrangement, indiqué par les six sommets d'un prisme droit à base triéquiangle. Le parallépipède générateur est un prisme droit dont la base est un rhombe de 60 et 120 degrés.

Troisième classe. — Assemblages quaternaires. Un axe quaternaire normal à un plan réticulaire dont le Réseau est à maille carrée; deux axes binaires de première espèce, parallèles aux côtés de ce carré; deux axes binaires de deuxième espèce, parallèles aux diagonales.

Un plan de symétrie normal à l'axe quaternaire; deux plans de symétrie de même espèce, normaux aux axes binaires de la première espèce; deux plans de symétrie d'une autre espèce, normaux aux axes binaires de la deuxième espèce.

Deux modes distincts d'arrangement :

1°. Le prisme droit à base carrée;

2°. Le prisme droit à base carrée, centré; on peut lui substituer un octaèdre droit à base carrée.

Quatrième classe. — Assemblages ternaires. Un axe ternaire normal à un plan réticulaire dont le Réseau est à maille triéquiangle; trois axes binaires de même espèce, parallèles aux côtés du triangle principal.

Trois plans de symétrie passant par l'axe ternaire et perpendiculaires aux axes binaires.

Un seul mode d'arrangement indiqué par les huit sommets d'un rhomboèdre.

Cinquième classe. — Assemblages terbinaires. Trois axes de symétrie binaire, rectangulaires entre eux, tous les trois d'espèces différentes; trois plans de symétrie joignant ces axes deux à deux.

Quatre modes distincts d'arrangement :

- 1°. Le prisme droit à base rectangle;
- 2°. Le prisme droit à base rectangle, centré; on peut lui substituer l'octaèdre droit à base rectangle;
- 3°. Le prisme droit à base rhombe; on peut lui substituer un prisme droit à base rectangle, centré sur ses deux bases, ou sur deux de ses faces latérales, parallèles et opposées l'une à l'autre;
- 4°. Le prisme droit à base rhombe, centré; on peut lui substituer l'octaèdre droit à base rhombe, dont les trois sections principales sont des rhombes.

Sixième classe. — Assemblages binaires. Un seul axe de symétrie binaire; un seul plan de symétrie normal à l'axe, et dont le Réseau a pour triangle principal un triangle acutangle quelconque.

Deux modes distincts d'arrangement :

- 1°. Le prisme droit à base parallélogrammique, non centré;
- 2°. Le prisme droit à base parallélogrammique, centré; on peut lui substituer le prisme droit à base parallélogrammique, ayant deux de ses faces latérales centrées.

Septième classe. — Assemblages asymétriques. Aucun axe, aucun plan de symétrie.

Un seul mode d'arrangement :

Le prisme oblique à base parallélogrammique.

Le tableau suivant indique le nombre des axes de symétrie dans les diverses classes d'Assemblages :

| ASSEMBLAGES. | NOMBRE DES AXES | | | | NOMBRE total des axes. |
|----------------------|-----------------|---------------|------------|-----------|------------------------------|
| | sénaires. | quaternaires. | ternaires. | binaires. | |
| Terquaternaires..... | 0 | 3 | 4 | 6 | 13 |
| Sénaires..... | 1 | 0 | 0 | 6 | 7 |
| Quaternaires..... | 0 | 1 | 0 | 4 | 5 |
| Ternaires..... | 0 | 0 | 1 | 3 | 4 |
| Terbinaires..... | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 |
| Binaires..... | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Asymétriques..... | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

On voit, d'après ce tableau, que le nombre total des axes suffit pour définir complètement chacune de ces classes, puisqu'il est nécessairement l'un des sept nombres 13, 7, 5, 4, 3, 1, 0; le premier de ces nombres exprime le plus haut degré de symétrie qui puisse se présenter dans un Assemblage.

Relativement à l'espèce des axes, on remarquera :

- 1°. Que les axes quaternaires sont toujours de même espèce ;
- 2°. Qu'il en est de même des axes ternaires ;
- 3°. Mais que cela n'est pas toujours ainsi pour les axes binaires.

Nous nommons axes binaires *de première espèce*, ceux de plus petit paramètre ; axes binaires *de deuxième espèce*, ceux dont le paramètre est plus grand que celui des axes de la première espèce, mais moindre que celui des axes de troisième espèce, si ces derniers axes se rencontrent dans l'Assemblage ; axes binaires *de troisième espèce*, ceux à paramètre maximum.

Le tableau suivant offre la distribution des axes binaires par espèces, pour chacune de nos six premières classes. J'y ai ajouté le nombre des plans de symétrie qui caractérisent la classe ; chacun d'eux correspond à un axe binaire, quaternaire ou sénair qui lui est normal.

Relativement aux plans de symétrie de même espèce ou d'espèces différentes, on se guidera sur la règle suivante : « A des axes d'ordre pair et de » même espèce correspondent toujours des plans de symétrie de même » espèce ; réciproquement, si les axes sont d'espèces différentes, les plans de » symétrie qui leur sont normaux sont aussi d'espèces différentes. »

Le nombre total des plans de symétrie est toujours égal au nombre total des axes d'ordre pair qui existent dans l'Assemblage.

Le nombre maximum de ces plans de symétrie est donc égal à 9.

| ASSEMBLAGES. | AXES BINAIRES DE | | | NOMBRE TOTAL des plans de symétrie. |
|----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|--|
| | première espèce. | deuxième espèce. | troisième espèce. | |
| Terquaternaires..... | 6 | 0 | 0 | 9 |
| Sénaires..... | 3 | 3 | 0 | 7 |
| Quaternaires..... | 2 | 2 | 0 | 5 |
| Ternaires..... | 3 | 0 | 0 | 3 |
| Terbinaires..... | 1 | 1 | 1 | 3 |
| Binaires..... | 1 | 0 | 0 | 1 |

Dans la deuxième classe (Assemblages sénaires), le paramètre des axes binaires de première espèce étant 1, celui des axes de deuxième espèce est toujours égal à $\sqrt{3}$.

Dans la troisième classe (Assemblages quaternaires), le paramètre des axes binaires de première espèce étant 1, celui des axes de deuxième espèce est toujours égal à $\sqrt{2}$.

Dans la cinquième classe (Assemblages terbinaires), les rapports sont indéterminés.

Notations symboliques de la symétrie des Assemblages.

Si, par l'un des Sommets d'un Assemblage, on fait passer tous les axes et plans de symétrie qui lui sont propres, on pourra considérer l'Assemblage comme un polyèdre dont le centre est au Sommet que l'on a choisi.

On nomme *centre de symétrie* dans un polyèdre un point central ainsi situé, qu'en le joignant à un sommet quelconque du polyèdre, et prolongeant la droite de jonction, au delà de ce centre, d'une quantité égale à elle-même, le point ainsi obtenu soit aussi un sommet du polyèdre, lequel sera dit l'*homologue* du sommet primitif, par rapport à ce centre de symétrie.

Tous les polyèdres ne sont point pourvus d'un tel centre de symétrie; lorsqu'il existe, sa présence y introduit un élément particulier de symétrie dont il est important de tenir compte.

Dans un Assemblage quelconque, tous les Sommets sont évidemment des

centres de symétrie ; cette multiplicité de centres est en rapport avec la multiplicité que l'on observe dans le système des axes de symétrie parallèles à un axe donné.

On peut appliquer aux Assemblages les mêmes notations symboliques qui m'ont servi à représenter la symétrie des polyèdres ordinaires (Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique, *Journal de Mathématiques*, tome XIV).

Dans les symboles que j'ai adoptés, la lettre C indique un polyèdre pourvu d'un centre de symétrie ; ce symbole devra évidemment se présenter dans toutes les expressions de la symétrie des Assemblages.

Les lettres Λ , L, L' désignent des axes de symétrie ; Λ^2 , L^2 , L'^2 , des axes binaires ; Λ^3 , L^3 , ..., des axes ternaires, et ainsi de suite, l'indice supérieur indiquant le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe.

La lettre Λ s'applique toujours à l'axe principal, seul de son espèce.

Le nombre des axes de même espèce est indiqué par le coefficient qui précède la lettre symbole de ces axes ; ainsi la notation (Λ^0 , $3L^2$, $3L'^2$) indique un axe principal sénaire combiné avec trois axes binaires d'une certaine espèce, et avec trois autres axes binaires d'une autre espèce.

Les plans de symétrie sont désignés par les lettres Π , P, P' ; on affectera la lettre Π au plan de symétrie normal à l'axe principal Λ ; les symboles P^q , P'^q , P''^q , aux plans de symétrie normaux aux axes L^q , L'^q , L''^q ; le nombre de ces plans sera placé, sous forme de coefficient, en avant de la lettre P : ainsi (Π , $3P^2$, $3P'^2$) signifiera un plan de symétrie normal à l'axe principal, trois plans de symétrie de même espèce normaux aux axes $3L^2$, et trois plans de symétrie d'une autre espèce normaux aux axes $3L'^2$.

Ceci posé, les symboles de nos sept classes d'Assemblages seront les suivants :

| ASSEMBLAGES. | SYMBOLE DE LEUR SYMÉTRIE. |
|--------------------------|--|
| Terquaternaires. | $3L^4, 4L^4, 6L^4, C, 3P^4, 6P^4.$ |
| Sénaires. | $\Lambda^6, 3L^4, 3L'^4, C, \Pi, 3P^4, 3P'^4.$ |
| Quaternaires. | $\Lambda^4, 2L^4, 2L'^4, C, \Pi, 2P^4, 2P'^4.$ |
| Ternaires. | $\Lambda^3, 3L^3, C, 3P^3.$ |
| Terbinaires. | $\Lambda^3, L^3, L'^3, C, \Pi, P^3, P'^3.$ |
| Binaires. | $\Lambda, C, \Pi.$ |
| Asymétriques. | $oL, C, oP.$ |

Il importe de remarquer qu'ici les lettres C, A, L, Π, P, \dots , représentent non pas un seul point, ou une seule ligne, ou un seul plan, comme cela a lieu dans les polyèdres à nombre limité de sommets, mais bien un système de points, ou un système d'axes tous parallèles, ou un système de plans pareillement tous parallèles entre eux.

Il faut ajouter encore qu'il existe dans les Assemblages des centres de symétrie qui ne coïncident pas avec les Sommets de l'Assemblage; ces centres de symétrie sont les analogues des axes intermédiaires et des plans de symétrie intermédiaires dont nous avons parlé, pages 60 et 62. Ainsi, dans la classe asymétrique, il existe huit systèmes distincts de centres de symétrie de l'Assemblage, savoir : 1° les Sommets de l'Assemblage; 2° les centres des parallépipèdes générateurs; 3° les centres des faces de ces parallépipèdes, centres qui se groupent en trois catégories distinctes; 4° les milieux des arêtes, qui constituent aussi trois systèmes distincts de centres. On peut consulter, à ce sujet, le Mémoire de M. Philippe Breton (*Journal de Mathématiques* de M. Liouville, tome X, page 430).

Il est entendu que nous nous bornons à considérer les centres qui coïncident avec des Sommets, de même que, parmi les axes de symétrie, nous n'avons tenu compte que de ceux qui passaient par des Sommets.

Des différents modes d'arrangement des Sommets dans la même classe d'Assemblages.

On a déjà pu remarquer que, dans une même classe d'Assemblages, venaient se grouper des Assemblages à modes d'agencement des Sommets complètement distincts, quoique les axes et plans de symétrie fussent les mêmes de part et d'autre. Je les nommerai les divers *modes* de la classe. M. Frankenheim, qui a été conduit, dans ses belles recherches sur la cristallographie (*), à une subdivision du même genre, a désigné ces modes sous le nom d'*ordres*; mais le terme « modes » me paraît ici préférable, comme exprimant le fait géométrique auquel ils correspondent. Par la même raison, je rejette la désignation de *types* sous laquelle je les avais d'abord décrits, dans une communication faite à la Société Philomathique le 17 mars 1849.

(*) *Acta Naturæ curiosorum*, t. XIX, 2^e partie, p. 483.

Deux Assemblages de la même classe appartiennent à des modes distincts de symétrie, lorsqu'en faisant varier d'une manière continue les espacements des Sommets de l'un des Assemblages, *sans qu'il perde un seul instant ses axes de symétrie*, on ne peut, malgré cela, le rendre que partiellement superposable avec l'autre Assemblage. Tels sont, par exemple, l'Assemblage dérivant du cube, et celui dérivant du cube centré. En faisant varier dans ce dernier le côté du cube, on peut faire coïncider la moitié de ses Sommets avec ceux du premier Assemblage; mais l'autre moitié, qui occupe les centres de figure des cubes, reste en dehors de la superposition.

Deux Assemblages appartiendront au même mode, lorsqu'une variation continue de leurs paramètres pourra les rendre coïncidents.

Lorsque les trois axes dont on fait varier les paramètres sont des Rangées conjuguées de chacun des deux Assemblages, ceux-ci appartiennent toujours au même mode d'arrangement; car la superposition de Rangées conjuguées homologues, Sommets à Sommets, entraîne avec elle celle des Assemblages.

Tous les modes distincts d'une même classe peuvent toujours dériver de l'un des modes de la classe, par l'addition de nouveaux Sommets, soit au centre de figure du solide générateur, soit sur les centres de ses faces; nous disons alors qu'on *centre* ce solide en son centre de figure, ou sur ses faces.

Je vais ajouter quelques nouveaux détails à ce qui a été déjà dit sur la division en modes de nos classes, ou *systèmes*.

Système terquaternaire. Il comprend trois modes distincts :

1°. Le mode hexaédral : le solide générateur est un cube portant une molécule à chacun de ses sommets (*voyez la remarque de la page 3, ligne 24*);

2°. Le mode octaédral : le solide dont il dérive est un octaèdre régulier portant une molécule à chacun de ses sommets; on peut le remplacer par un tétraèdre régulier, qui en est une forme équivalente, ou bien encore par le rhomboèdre de $70^{\circ} 31'44''$. Ce mode dérive du cube par le centrage des six faces de ce solide; alors le nouveau cube (cube à faces centrées), outre les molécules de ses sommets, en porte une au centre de chacune de ses faces. La symétrie du solide ainsi obtenu est plus immédiatement évidente que celle de toutes ses autres formes équivalentes;

3°. Le mode dodécaédral : le solide dont il dérive est un dodécaèdre

rhomboïdal portant une molécule en chacun de ses quatorze sommets et de plus une molécule centrale.

On peut le faire dériver du cube, par l'addition d'une molécule dans le centre de figure du solide. Si l'on joint par des droites les huit sommets d'un tel cube avec les six centres des cubes voisins, apposés sur chacune de ses six faces, on retombe sur le dodécaèdre rhomboïdal centré.

On peut aussi prendre pour solide générateur le rhomboèdre de 120 degrés ; mais la symétrie de l'Assemblage est alors moins évidente que dans le cas où l'on considère le cube centré.

Système sénaire. — Un seul mode (voyez page 89).

Système quaternaire. — Il comprend deux modes distincts :

1°. Le mode hexaédral, dont le solide générateur est un prisme droit à base carrée ;

2°. Le mode octaédral, qui dérive d'un octaèdre droit à base carrée. On obtient cet octaèdre en centrant le prisme droit à base carrée, joignant ce centre avec les quatre sommets de la base, et ceux-ci avec le centre du prisme sous-jacent.

Système ternaire. — Un seul mode (voyez page 89).

Système terbinaire. — Quatre modes distincts :

1°. Le mode hexaédral rectangle : le solide générateur est un prisme droit à base rectangulaire, portant des molécules en chacun de ses huit sommets ; les Réseaux des trois plans de symétrie du système ont alors des mailles rectangulaires ;

2°. Le mode hexaédral rhombique : le solide générateur est un prisme droit à base rhombe. Ce mode dérive du précédent, au moyen du centrage de deux faces opposées, par exemple des deux bases du prisme générateur. On sait, en effet, qu'en centrant les mailles d'un Réseau rectangulaire, celui-ci se change en un Réseau à maille rhombe. Dans ce cas, les Réseaux des deux plans de symétrie verticaux sont à maille rectangulaire ; mais la maille est rhombe sur le troisième plan : l'axe normal à ce dernier plan peut être, suivant les cas, de première, de deuxième ou de troisième espèce ;

3°. Le mode octaédral rectangle : le solide dont il dérive est un octaèdre droit à base rectangle. On pourra le faire dériver du prisme droit de même base et de même hauteur, en centrant ce dernier en son centre de figure, et

joignant ce nouveau Sommet aux quatre Sommets du rectangle de la base, ceux-ci avec le centre du prisme sous-jacent. Les Réseaux des trois plans de symétrie ont alors des mailles rectangles ;

4°. Le mode octaédral rhombique, fourni par l'octaèdre droit à base rhombe. On le fera dériver du prisme hexaédral rectangle, en centrant les six faces de ce dernier prisme : ces six nouveaux Sommets, joints deux à deux, donneront l'octaèdre droit à base rhombe. Les Réseaux des trois plans de symétrie seront alors à maille rhombe.

On voit que ces quatre modes correspondent au prisme droit non centré, au prisme droit centré sur ses deux bases, au prisme droit centré en son centre de figure, et au prisme droit centré sur ses six faces.

Système binaire. — Ce système n'offre que deux modes distincts :

1°. Le mode hexaédral, dont le solide générateur est un prisme droit à base parallélogrammique ;

2°. Le mode octaédral, qui dérive du précédent en centrant les prismes de ce dernier en leur centre de figure, ou bien encore en centrant deux de leurs quatre faces verticales. Ces deux genres de dérivation correspondent à un seul et même mode (*) (théorème LV, scolie I).

Si, après le centrage de deux faces verticales, on fait tourner le prisme de 90 degrés, en rendant verticales les arêtes suivant lesquelles se coupent les quatre faces non centrées, on obtient pour solide générateur un prisme à base rhombe, non horizontale, qui est le prisme rhomboïdal oblique des minéralogistes.

Système asymétrique. — Ce système n'offre qu'un seul mode.

(*) M. Frankenheim (*Acta Nat. curiosorum*, t. XIX, 2^e partie, p. 570) admet dans les Assemblages binaires (système du prisme oblique d'Haüy) trois modes distincts :

1°. Le prisme droit à base parallélogrammique ;

2°. Le prisme oblique à base rhombe ;

3°. L'octaèdre droit à base parallélogrammique.

Il est facile de voir que les modes 2° et 3° forment double emploi, et correspondent seulement à des positions différentes de l'axe binaire, qui est horizontal et transverse dans le prisme oblique à base rhombe d'Haüy, tandis qu'il est vertical dans l'octaèdre droit à base parallélogrammique.

Les divisions rationnelles du mode octaédral dépendent de la manière dont le Sommet, centre du prisme, se projette sur sa base, relativement aux trois côtés du triangle principal du Réseau.

Outre la communauté de position des axes et plans de symétrie, les divers modes d'un même système sont reliés entre eux par la propriété énoncée dans le théorème suivant :

THÉORÈME LXXXII. — *Tous les Assemblages appartenant aux divers modes d'une même classe, et qui dérivent les uns des autres par des centrages convenablement faits, offrent les mêmes systèmes de Rangées, et les mêmes systèmes de plans réticulaires.*

En effet, lorsqu'on centre des parallépipèdes générateurs, cela revient à ajouter un Sommet sur le milieu de l'une des diagonales du parallépipède, d'ailleurs arbitrairement choisie; or cette intercalation, en vertu du théorème LIII, n'altère pas les systèmes de Rangées et plans réticulaires de l'Assemblage, du moins quant à leur direction absolue.

Lorsqu'on centre deux faces opposées du parallépipède générateur, cela revient à ajouter un Sommet sur le milieu de l'une des deux diagonales de la face, c'est-à-dire à doubler le nombre des Sommets du système des Rangées correspondantes; les systèmes de Rangées et plans réticulaires restent encore les mêmes, quant à leur direction. Donc, etc.

Scolie. — Le même théorème s'applique aussi aux Assemblages sénaire et ternaire qui ont le même axe principal et le même Réseau sur le plan normal à cet axe. On peut même remarquer que la coexistence des mêmes systèmes de Rangées et plans réticulaires s'applique à la fois à l'Assemblage sénaire et aux deux Assemblages ternaires *direct* et *inverse* qui en dérivent par l'intercalation de deux nouveaux Sommets sur chaque paramètre des Rangées diagonales du prisme générateur à base rhombe (théorème LXI, corollaire).

Des plans réticulaires de même espèce et des Rangées de même espèce dans les Assemblages symétriques.

Définition. — Deux plans réticulaires sont de même espèce dans un Assemblage, lorsque la configuration des Sommets relativement à l'un de ces plans est la même que la configuration des Sommets relativement à l'autre. Pour constater cette similitude de configuration, on lie par la pensée les Sommets de l'Assemblage à chacun des deux plans, et l'un des deux systèmes est supposé mobile. Alors, si l'on peut faire coïncider en même

temps le plan mobile avec le plan fixe, les Sommets mobiles avec les Sommets fixes, les plans réticulaires seront de même espèce.

Pour que deux plans réticulaires soient de même espèce, il faut que leurs Réseaux soient superposables; mais cette condition n'est pas toujours suffisante. Il faut, en outre, que la superposition des Réseaux entraîne celle des Sommets extérieurs aux plans.

J'ai fait voir (Journal de M. Liouville, tome XIV, page 137) : 1° qu'on obtenait le polyèdre inverse d'un polyèdre donné, en prenant un point arbitrairement, joignant ce point, ou pôle de symétrie, avec les sommets du polyèdre donné et prolongeant ces droites en arrière de quantités égales à elles-mêmes; 2° qu'au moyen du polyèdre inverse, tournant de 180 degrés autour d'une droite quelconque menée par le pôle, on obtenait un polyèdre symétrique du polyèdre donné (dans le sens géométrique de ce terme) par rapport à un plan de symétrie normal à la droite.

L'Assemblage inverse d'un Assemblage donné est toujours susceptible de coïncider avec l'Assemblage primitif: il suffit de prendre pour pôle de symétrie l'un des Sommets. Il en résulte qu'il en est de même d'un Assemblage et de l'un de ses symétriques (dans le sens géométrique du mot), ou, en d'autres termes, que deux Assemblages, symétriques par rapport à un plan de symétrie quelconque, peuvent toujours être amenés à coïncidence.

THÉORÈME LXXXIII. — *Si, en faisant coïncider le Réseau du plan réticulaire M de l'Assemblage mobile avec le Réseau du plan réticulaire F de l'Assemblage fixe, les deux Assemblages, au lieu de coïncider, devenaient symétriques l'un de l'autre (dans le sens géométrique) par rapport au plan des deux Réseaux coïncidents, les deux plans réticulaires seraient de même espèce.*

En effet, si l'on fait alors tourner, de 180 degrés, l'Assemblage mobile autour d'une droite passant par l'un des Sommets des Réseaux coïncidents et normale au plan de ces Réseaux, on amènera l'Assemblage mobile en coïncidence avec l'inverse de l'Assemblage fixe (*), c'est-à-dire avec l'Assemblage fixe lui-même.

(*) Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie, théorème IV (Journal de Mathématiques, tome XIV, page 139).

THÉORÈME LXXXIV. — *Dans tout Assemblage possédant un plan de symétrie, deux plans réticulaires, symétriques (dans le sens géométrique) par rapport à ce plan, sont de même espèce.*

En faisant tourner l'un de ces deux plans, considéré comme faisant partie de l'Assemblage mobile, autour de la droite, intersection de ces plans, on amènera leurs Réseaux en coïncidence, et l'Assemblage mobile deviendra symétrique (dans le sens géométrique) de l'Assemblage fixe par rapport au plan des Réseaux superposés; donc, en vertu du théorème précédent, ces plans seront de même espèce.

On peut aussi établir directement que les deux plans donnés sont de même espèce, en les faisant passer tous les deux par un Sommet pris arbitrairement S, et menant par S une normale au plan de symétrie. Cette normale sera un axe d'ordre pair (théorème LII); si donc on fait tourner l'Assemblage mobile d'un angle égal à q fois l'angle $\frac{360^\circ}{2q}$, $2q$ étant le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe, il y aura restitution des lieux des Sommets, et il est facile de voir que les deux plans réticulaires donnés viendront à superposition, Sommet sur Sommet.

THÉORÈME LXXXV. — *Deux plans réticulaires parallèles sont de même espèce.*

Il suffit de transporter le Réseau mobile parallèlement à lui-même pour obtenir la coïncidence des Sommets.

THÉORÈME LXXXVI. — *S'il existe dans un Assemblage deux plans réticulaires de même espèce, mais non parallèles, cet Assemblage possède au moins un axe de symétrie.*

Les deux plans réticulaires, que je nommerai F et M, peuvent toujours être considérés comme ayant un Sommet commun S qui ne participe pas aux mouvements de l'Assemblage mobile. Supposons que des rotations convenables de cet Assemblage aient fini par amener le Réseau mobile M sur le Réseau fixe F. La coïncidence pourra toujours (d'après la théorie bien connue de la composition des rotations en mécanique) être considérée comme produite par une seule rotation de l'Assemblage mobile autour d'un axe de rotation passant par le Sommet S. Il importe de remarquer que cette droite, ainsi que l'angle de rotation unique qui amène M en coïnci-

dence avec F , se trouvent complètement déterminés, à la condition cependant que l'angle de rotation ne surpasse pas 180 degrés. Cette droite, jouissant ainsi de la propriété de produire, après rotation convenable, la restitution des lieux des Sommets, sera un axe de symétrie de l'Assemblage.

Corollaire. — Il ne peut y avoir de plans réticulaires de même espèce, et non parallèles, dans les Assemblages asymétriques.

Définition. — Deux plans réticulaires de même espèce et non parallèles, sont dits *homologues* par rapport à un axe de symétrie de l'Assemblage, lorsque la rotation *unique* qui amène leurs Réseaux en coïncidence, l'Assemblage mobile se superposant à l'Assemblage fixe, a lieu autour de cet axe; l'on déduit de là le théorème suivant :

THÉORÈME LXXXVII. — *Deux plans réticulaires de même espèce, non parallèles, sont toujours homologues par rapport à un axe de symétrie.*

Corollaire. — On obtient tous les systèmes de plans réticulaires qui sont de la même espèce qu'un plan réticulaire donné, en cherchant les homologues de ce plan par rapport à tous les axes de symétrie de l'Assemblage.

THÉORÈME LXXXVIII. — *Le nombre des plans réticulaires de même espèce, homologues par rapport à un axe de symétrie d'ordre q , est égal à q , si ces plans réticulaires n'offrent aucune particularité de position par rapport à l'axe, c'est-à-dire si ces plans ne sont ni normaux ni parallèles à cet axe.*

En faisant tourner le plan de $\frac{360^\circ}{q}$, $2 \frac{360^\circ}{q}$, ..., $(q-1) \frac{360^\circ}{q}$, on obtiendra ses $q-1$ homologues; il est évident que leur nombre total est égal à q : ces plans sont tous distincts les uns des autres, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent être parallèles entre eux.

THÉORÈME LXXXIX. — *Le nombre des plans réticulaires de même espèce, homologues par rapport à un axe d'ordre q , et parallèles à cet axe, est égal à q , si q est impair, et à $\frac{1}{2} q$, si q est pair.*

Le nombre total des plans est encore ici égal à q ; mais, dans le cas particulier où q serait un nombre pair, les plans deviennent parallèles, deux à deux; le nombre total des plans de direction distincte se réduit donc alors à $\frac{1}{2} q$.

THÉORÈME XC. — *Le nombre des plans de même espèce, homologues par rapport à l'axe d'ordre q , se réduit à l'unité, dans le cas où le plan primitivement donné est normal à l'axe.*

Cette proposition est évidente.

Au moyen de ces principes, on résoudra facilement la question de la détermination des plans réticulaires de même espèce, quant à leur nombre, et quant à leur situation relative, pour un Assemblage donné, soit dans le cas où ces plans n'offriraient aucune particularité de position relativement aux axes de symétrie, soit dans le cas où ils seraient parallèles ou normaux à un certain nombre de ces axes. Cette question est d'une grande importance en cristallographie.

On peut établir pour les Rangées de même espèce des théorèmes tout à fait semblables à ceux qui se rapportent aux plans réticulaires de même espèce.

Définitions. — La définition des Rangées de même espèce est la même que celle des axes ou plans réticulaires de même espèce; celle des Rangées homologues est pareille à celle des plans réticulaires homologues.

THÉORÈME XCI. — *Si, en faisant coïncider le paramètre de la Rangée M de l'Assemblage mobile avec celui de la Rangée F de l'Assemblage fixe, les deux Assemblages, au lieu de coïncider, devenaient symétriques l'un de l'autre (dans le sens géométrique de ce terme) par rapport à un plan passant par la Rangée F, les deux Rangées seraient de même espèce.*

Car, si l'on fait alors tourner l'Assemblage mobile, de 180 degrés, autour d'une droite passant par l'un des Sommets de la Rangée F et normale au plan de symétrie, on amènera l'Assemblage mobile en coïncidence avec l'inverse de l'Assemblage fixe, c'est-à-dire avec l'Assemblage fixe lui-même.

THÉORÈME XCII. — *Dans tout Assemblage possédant un plan de symétrie, deux Rangées, symétriques (dans le sens géométrique) par rapport à ce plan, sont de même espèce.*

THÉORÈME XCIII. — *Deux Rangées parallèles sont de même espèce.*

THÉORÈME XCIV. — *S'il existe dans un Assemblage deux Rangées de même espèce, non parallèles, cet Assemblage possède au moins un axe de symétrie.*

THÉORÈME XCV. — *Deux Rangées de même espèce, non parallèles, sont toujours homologues par rapport à un axe de symétrie.*

Corollaire. — On obtient tous les systèmes de Rangées de même espèce que celle d'une Rangée donnée, en cherchant les homologues de celle-ci par rapport à tous les axes de symétrie de l'Assemblage.

THÉORÈME XCVI. — *Le nombre des Rangées de même espèce, homologues par rapport à un axe d'ordre q , est égal à q , si ces Rangées ne sont ni parallèles ni normales à cet axe.*

THÉORÈME XCVII. — *Le nombre des Rangées de même espèce, homologues par rapport à un axe d'ordre q et normales à cet axe, est égal à q , si q est impair, et à $\frac{1}{2}q$, si q est pair.*

THÉORÈME XCVIII. — *Le nombre des Rangées, homologues par rapport à l'axe d'ordre q , se réduit à l'unité, dans le cas du parallélisme de la Rangée avec l'axe.*

Ces théorèmes se démontreraient exactement comme les théorèmes LXXXIV à XC : ils sont, du reste, une conséquence nécessaire de la réciprocité qui existe entre les Rangées et les plans réticulaires dans les Assemblages dits « Assemblages polaires l'un de l'autre, » réciprocité dont il sera question dans le paragraphe suivant.

THÉORÈME XCIX. — *Des axes de symétrie de même espèce sont en même temps des Rangées de même espèce.*

Ce théorème est la conséquence des définitions des axes de même espèce (page 58) et des Rangées de même espèce (page 102).

§ VI. — DES ASSEMBLAGES POLAIRES.

Définitions, notations. — Un Assemblage étant donné, menons par l'un de ses Sommets, pris arbitrairement pour origine, des normales à trois plans conjugués de cet Assemblage, et sur chacune de ces trois normales, portons des longueurs égales aux aires des parallélogrammes élémentaires des Réseaux tracés sur chacun de ces plans, divisées par l'intervalle moyen des Sommets. Si, avec ces trois nouveaux axes, et ces longueurs pour paramètres, on

construit un Assemblage, il sera dit l'*Assemblage polaire du primitif*, et jouira de propriétés importantes, que nous allons faire connaître.

Le symbole ghk représentant une Rangée allant de l'origine au Sommet dont les coordonnées numériques sont g, h, k dans l'Assemblage primitif, le symbole $[ghk]$ représentera une Rangée allant de l'origine au point dont les coordonnées numériques sont g, h, k dans son Assemblage polaire.

Le symbole (ghk) représentant le plan réticulaire dont l'équation est

$$gx + hy + kz = 0,$$

le symbole $[(ghk)]$ représentera un plan réticulaire dont l'équation est de même forme dans l'Assemblage polaire.

Je continuerai à désigner par $Pghk$ le paramètre d'une Rangée allant de l'origine au Sommet dont les coordonnées numériques sont g, h, k , c'est-à-dire le paramètre de la Rangée ghk .

Je désignerai par $P[ghk]$ le paramètre d'une Rangée allant de l'origine au point dont les coordonnées numériques sont g, h, k dans l'Assemblage polaire, c'est-à-dire le paramètre de la Rangée polaire $[ghk]$.

Je continuerai à désigner par $S(ghk)$ l'aire du parallélogramme générateur du Réseau tracé sur le plan réticulaire (ghk) , dans l'Assemblage primitif.

De même $S[(ghk)]$ sera l'aire du parallélogramme élémentaire du Réseau tracé sur le plan réticulaire dont la notation est $[(ghk)]$, dans l'Assemblage polaire.

Continuant à nommer E l'intervalle moyen, et remarquant 1° que 100, 010, 001 sont les notations symboliques des axes des x , des y et des z ; 2° que (100), (010), (001) sont les notations symboliques des plans des yz , des xz et des xy , on aura, d'après les conventions précédentes,

$$(63) \quad P[100] = \frac{S(100)}{E}, \quad P[010] = \frac{S(010)}{E}, \quad P[001] = \frac{S(001)}{E}.$$

Je continuerai à désigner par α, β, δ les angles plans sur les plans des yz , des xz et des xy ; par μ, ν, ϖ , les angles dièdres ayant pour arêtes les axes

des x , des y et des z . Ceci posé, on aura évidemment

$$(64) \quad \begin{cases} S(100) = P_{010} \cdot P_{001} \cdot \sin \alpha, \\ S(010) = P_{100} \cdot P_{001} \cdot \sin \beta, \\ S(001) = P_{100} \cdot P_{010} \cdot \sin \delta. \end{cases}$$

Dans l'Assemblage polaire, nous prendrons pour axe des $[x]$ la normale au plan des yz , pour axe des $[y]$ la normale au plan des xz , pour axe des $[z]$ la normale au plan des xy . Les trois demi-axes positifs doivent être dirigés du même côté que le demi-axe positif de même désignation dans l'Assemblage primitif, par rapport au plan auquel chacun de ces nouveaux axes est perpendiculaire. Les trois angles plans de ces axes seront représentés par $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\delta]$; leurs trois angles dièdres, par $[\mu]$, $[\nu]$, $[\varpi]$.

THÉORÈME C. — *Les angles α , β , δ étant les angles plans du parallépipède générateur de l'Assemblage primitif, et μ , ν , ϖ ses angles dièdres, les angles plans de son polaire seront $180^\circ - \mu$, $180^\circ - \nu$, $180^\circ - \varpi$, et ses angles dièdres $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \delta$.*

C'est une conséquence bien connue des propriétés des triangles sphériques polaires.

On aura donc

$$(65) \quad [\alpha] = 180^\circ - \mu, \quad [\beta] = 180^\circ - \nu, \quad [\delta] = 180^\circ - \varpi,$$

$$(66) \quad [\mu] = 180^\circ - \alpha, \quad [\nu] = 180^\circ - \beta, \quad [\varpi] = 180^\circ - \delta.$$

THÉORÈME CI. — *Si, du sommet O d'un tétraèdre OABD (fig. 38), on élève sur les trois faces latérales OBD, OAD, OAB les normales Oa, Ob, Od, situées, par rapport à chaque face, du même côté que le sommet opposé à la face, et égales respectivement aux aires triangulaires de ces trois faces, la diagonale du parallépipède construit sur les arêtes Oa, Ob, Od sera normale à la base ABD et égale à l'aire de cette base.*

On a, par construction,

$$Oa = \text{aire OBD}, \quad Ob = \text{aire OAD}, \quad Od = \text{aire OAB}.$$

De même que Oa, Ob, Od sont perpendiculaires aux plans OBD, OAD,

OAB, de même OA, OB, OD seront perpendiculaires aux plans Obd , Oad , Oab .

Abaissons de O sur la base ABD la normale OP, et par a menons le plan $aA'p$ parallèle au plan bOd , et, par conséquent, normal à l'arête OA. Ce plan coupera OA en A' et OP en p . Projets les triangles OBD, ABD sur le plan $aA'p$; O et A auront une même projection en A' : ainsi les deux aires projetées coïncideront. La première des deux aires projetées a pour valeur

$$\text{aire OBD} \cos (\widehat{\text{plan ODB, plan } aA'p}),$$

et, en remplaçant les plans par leurs normales,

$$\text{aire OBD} \cos (\widehat{Oa, OA}) = \text{aire OBD} \frac{OA'}{Oa} = OA'.$$

L'autre aire projetée sera de même

$$\text{aire ABD} \cos (\widehat{Op, OA}) = \text{aire ABD} \frac{OA'}{Op}.$$

Donc, en égalant ces deux expressions, il viendra

$$OA' = \text{aire ABD} \frac{OA'}{Op},$$

d'où

$$(67) \quad Op = \text{aire ABD}.$$

Menons maintenant par b un plan parallèle à aOd ; on démontrera de même que ce plan coupe OP à une distance de O égale précisément à l'aire ABD, c'est-à-dire au point p déjà obtenu.

Il en sera de même, en menant par d un plan parallèle à aOb . Ces trois plans, avec leurs plans parallèles bOd , aOd , aOb , forment un parallélépipède dont Oa , Ob , Od sont les arêtes, et dont Op est la diagonale; cette diagonale est donc égale et normale au triangle ABD.

Corollaire. — Si les arêtes Oa , Ob , Od , sans être égales aux aires des faces, leur étaient proportionnelles dans le rapport 1 : B, la diagonale Op serait aussi, avec l'aire ABD, dans le même rapport 1 : B; elle continuerait à être normale au plan ABD.

THÉOREME CII. — Si (ghk) est le symbole d'un plan réticulaire appartenant à un Assemblage donné, et si, dans son Assemblage polaire, l'on construit la droite menée de l'origine au point dont les coordonnées numériques sont g, h, k , cette droite, de symbole $[ghk]$, sera normale au plan (ghk) .

Soient Ox, Oy, Oz (fig. 39) les trois Rangées conjuguées prises pour axes coordonnés dans l'Assemblage primitif, et soient a, b, d les paramètres de ces Rangées : faisons

$$OA = hka, \quad OB = gkb, \quad OD = gh d.$$

L'équation du plan ABD en coordonnées numériques sera

$$gx + hy + kz = ghk.$$

On aura de plus

$$(68) \quad \begin{cases} \text{aire OBD} = \frac{1}{2} g^2 h k b d \sin \alpha = \frac{1}{2} g^2 h k S(100), \\ \text{aire OAD} = \frac{1}{2} g h^2 k a d \sin \beta = \frac{1}{2} g h^2 k S(010), \\ \text{aire OAB} = \frac{1}{2} g h k^2 a b \sin \delta = \frac{1}{2} g h k^2 S(001). \end{cases}$$

Les symboles $S(100), S(010), S(001)$ représentent, d'après nos conventions, les aires des parallélogrammes générateurs sur le plan des yz , sur le plan des xz et sur le plan des xy .

Construisons maintenant les trois axes de l'Assemblage polaire, et soient pris, sur ces axes,

$$Oa = gP[100] = \frac{gS(100)}{E},$$

$$Ob = hP[010] = \frac{hS(010)}{E},$$

$$Od = kP[001] = \frac{kS(001)}{E},$$

E étant l'intervalle moyen des Sommets.

Soit Op la diagonale du parallélipède construit sur Oa, Ob, Od ; les coordonnées numériques de p seront g, h, k dans l'Assemblage polaire, et la notation de la Rangée Op sera $[ghk]$.

En comparant les valeurs de Oa, Ob, Od aux expressions des aires OBD,

OAD, OAB (équations 68), on voit qu'elles leur sont proportionnelles, dans le rapport

$$\frac{1}{E} : \frac{1}{2} g h k = 1 : \frac{1}{2} g h k E.$$

Donc, d'après le corollaire du théorème CI, la diagonale Op sera normale à la base ABD, c'est-à-dire au système des plans réticulaires dont le symbole est (*ghk*).

Deuxième démonstration. — Si l'on veut démontrer le théorème CII par l'analyse géométrique à trois dimensions, on nommera τ l'inclinaison de l'axe Oz sur le plan des xy (*fig.* 39); ξ_0, η_0, ζ_0 , les coordonnées linéaires du point a ; ξ_1, η_1, ζ_1 , celles du point b ; ξ_2, η_2, ζ_2 , celles du point d , et on posera

$$(69) \quad 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \delta + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \delta = J^2.$$

On aura alors

$$\zeta_2 = \frac{Od}{\sin \tau} = \frac{Od \sin \delta}{J} = \frac{kab \sin^2 \delta}{JE};$$

d'où l'on conclura facilement les valeurs de ξ_2, η_2 par les équations connues de la normale au plan des xy , dans les systèmes d'axes obliques.

On déterminerait de même $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$.

Les coordonnées ξ, η, ζ du point p seront alors données par les formules

$$\begin{aligned} \xi JE &= (\xi_0 + \xi_1 + \xi_2) JE \\ &= gbd \sin^2 \alpha - had \sin \alpha \sin \beta \cos \varpi - kab \sin \alpha \sin \delta \cos \nu; \\ \eta JE &= (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2) JE \\ &= -gbd \sin \alpha \sin \beta \cos \varpi + had \sin^2 \beta - kab \sin \beta \sin \delta \cos \mu; \\ \zeta JE &= (\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2) JE \\ &= -gbd \sin \beta \sin \delta \cos \mu - had \sin \alpha \sin \delta \cos \nu + kab \sin^2 \delta. \end{aligned}$$

Si donc on pose, pour abréger,

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{g}{a} \sin^2 \alpha - \frac{h}{b} \sin \alpha \sin \beta \cos \varpi - \frac{k}{d} \sin \alpha \sin \delta \cos \nu &= r, \\ -\frac{g}{a} \sin \alpha \sin \beta \cos \varpi + \frac{h}{b} \sin^2 \beta - \frac{k}{d} \sin \beta \sin \delta \cos \mu &= s, \\ -\frac{g}{a} \sin \beta \sin \delta \cos \mu - \frac{h}{b} \sin \alpha \sin \delta \cos \nu + \frac{k}{d} \sin^2 \delta &= t, \end{aligned} \right.$$

les équations de la droite Op seront

$$\frac{\xi}{r} = \frac{\eta}{s} = \frac{\zeta}{t}.$$

Or il est connu que ces équations, après substitution des valeurs de r, s, t , représenteront la normale au plan dont l'équation est

$$\frac{g}{a}\xi + \frac{h}{b}\eta + \frac{k}{d}\zeta = 0,$$

et dont la notation symbolique est (ghk) .

THÉORÈME CIII. — *Si (ghk) est le symbole d'un plan réticulaire dans un Assemblage, sa normale sera une Rangée de l'Assemblage polaire, et y aura $[ghk]$ pour symbole.*

C'est un corollaire du théorème précédent.

THÉORÈME CIV. — *Le paramètre de la Rangée $[ghk]$ est égal à l'aire du parallélogramme générateur du Réseau tracé sur le plan (ghk) , divisée par l'intervalle moyen des Sommets.*

Les conventions sont les mêmes que dans les théorèmes précédents. Soit Op (*fig. 39*) le paramètre de la Rangée $[ghk]$, g, h, k n'ayant pas d'autre diviseur commun que l'unité; d'après le corollaire du théorème CI, on aura

$$Op : \text{aire ABD} :: Oa : \text{aire OBD};$$

or ce rapport est $1 : \frac{1}{2} ghk E$: donc

$$Op = \frac{2 \text{ aire ABD}}{ghk E}.$$

Mais il a été démontré (théorème XXXVIII, équation 47) que l'on a

$$\text{aire ABD} = \frac{1}{2} ghk \omega,$$

ω étant l'aire du parallélogramme générateur du Réseau, sur le plan ABD.

Donc, en remplaçant ω par $S(ghk)$, on aura

$$2 \text{ aire ABD} = ghk S(ghk),$$

$$Op = \frac{S(ghk)}{E}.$$

d'où l'on déduit la formule générale

$$(71) \quad P[ghk] = \frac{S(ghk)}{E},$$

qui est la traduction algébrique de la proposition que nous avons à démontrer.

Scolie. — Ainsi les formules (63) ne sont que des cas particuliers de la formule (71).

Corollaire I. — Un Assemblage donné n'a qu'un seul Assemblage polaire, qui se trouve fixé, dès que l'on assigne le Sommet qui doit être commun aux deux Assemblages. Car l'Assemblage polaire construit sur trois Rangées conjuguées, prises au hasard, devra coïncider, d'après le théorème précédent, avec le polaire construit sur tout autre système de Rangées.

Corollaire II. — Si trois plans sont conjugués dans un Assemblage, leurs normales sont des Rangées conjuguées de son polaire.

Le parallélipède construit sur ces trois Rangées sera le *parallélipède polaire* de celui qui se construit avec les trois plans conjugués et leurs limitrophes, dans l'Assemblage primitif.

Corollaire III. — Réciproquement, si trois Rangées sont conjuguées dans un Assemblage, leurs plans normaux sont des plans conjugués dans son polaire.

Corollaire IV. — La condition pour que trois plans réticulaires (ghk) , $(g'h'k')$, $(g''h''k'')$ soient conjugués, s'obtiendra en cherchant la condition pour que $[ghk]$, $[g'h'k']$, $[g''h''k'']$ soient trois Rangées conjuguées; elle sera donc (équation 43)

$$gh'k'' - gk'h'' + kg'h'' - hg'k'' + hk'g'' - kh'g'' = \pm 1.$$

PROBLÈME XXXI. — Trouver $S(ghk)$, ou l'aire de la maille du Réseau du plan réticulaire (ghk) .

On a généralement (problème XVI) dans l'Assemblage primitif,

$$(72) \quad \begin{cases} P^2 ghk = g^2 P^2 100 + h^2 P^2 010 + k^2 P^2 001 \\ \quad + 2gh P 100.P 010.\cos \delta + 2gk P 100.P 001.\cos \beta + 2hk P 010.P 001.\cos \gamma. \end{cases}$$

En écrivant que la même relation doit avoir lieu dans l'Assemblage

polaire, et remplaçant ensuite

$$P[ghk] \text{ par } \frac{1}{E} S(ghk),$$

$$P[100] \text{ par } \frac{1}{E} S(100),$$

$$P[010] \text{ par } \frac{1}{E} S(010),$$

$$P[001] \text{ par } \frac{1}{E} S(001),$$

$$[\alpha] \text{ par } 180^\circ - \mu,$$

$$[\beta] \text{ par } 180^\circ - \nu,$$

$$[\delta] \text{ par } 180^\circ - \mu,$$

on aura

$$(73) \quad \begin{cases} S^2(ghk) = g^2 S^2(100) + h^2 S^2(010) + k^2 S^2(001) \\ \quad - 2gh S(100) \cdot S(010) \cdot \cos \pi - 2gk S(100) \cdot S(001) \cdot \cos \nu - 2hk S(010) \cdot S(001) \cdot \cos \mu. \end{cases}$$

C'est la formule déjà obtenue (équation 50) : mais il convenait de la rapprocher de la formule (72) pour montrer la loi remarquable de réciprocité qui les unit.

Remarque relative aux formules (72) et (73). — Si, dans l'équation (72), on écrit

$$P_{100} = \sqrt{a}, \quad P_{010} = \sqrt{a'}, \quad P_{001} = \sqrt{a''}, \quad P_{ghk} = \sqrt{f},$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a'a''}}, \quad \cos \beta = \frac{b'}{\sqrt{aa''}}, \quad \cos \delta = \frac{b''}{\sqrt{aa'}},$$

cette équation deviendra

$$f = ag^2 + a'h^2 + a''k^2 + 2b''gh + 2b'gk + 2bhk.$$

La quantité f a reçu, de M. Gauss, le nom de *forme ternaire* (GAUSS, *Disquisitiones Arithmeticae*, p. 426), et l'illustre géomètre l'exprime par le symbole

$$\left(\begin{matrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{matrix} \right) = f.$$

La quantité

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = D$$

a été appelée, par M. Gauss, le *déterminant de la forme*. En remplaçant

a, a', a'', b, b', b'' par leurs valeurs, et tenant compte des équations (52) et (54), on trouve

$$D = P^2_{100} \cdot P^2_{010} \cdot P^2_{001} (-1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \delta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \delta) = -E^2,$$

la lettre E continuant à représenter l'intervalle moyen des Sommets de l'Assemblage.

On voit, d'après cela, que toute forme ternaire correspond à un Assemblage de points, *réels* ou *imaginaires*; que chaque valeur particulière de f , pour des valeurs déterminées et entières de g, h, k , exprime le carré de la distance de deux points ou Sommets de l'Assemblage; que le déterminant de la forme, pris avec le signe $-$, est le carré du volume du parallépipède générateur, ou la sixième puissance de l'intervalle moyen des Sommets, etc.

Des résultats analogues ont lieu pour les formes binaires

$$ag^2 + 2bgh + a'h^2,$$

dont le déterminant $b^2 - aa'$, pris avec un signe contraire, représente le carré de l'aire du parallélogramme générateur, ou la quatrième puissance de l'intervalle moyen des Sommets sur le plan du Réseau qui dérive de cette forme binaire.

La forme ternaire

$$\begin{pmatrix} b^2 - a'a'', & b'^2 - aa'', & b''^2 - aa' \\ ab - b'b'', & a'b' - bb'', & a''b'' - bb' \end{pmatrix}$$

a été appelée, par M. Gauss, la forme *adjointe* de la forme

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix};$$

elle est désignée dans les *Disquisitiones* par la lettre F.

Il résulte du mode de génération de a, a', a'', b, b', b'' , que l'on a

$$b^2 - a'a'' = -P^2_{010} \cdot P^2_{001} \cdot \sin^2 \alpha = -S^2(100),$$

$$b'^2 - aa'' = -S^2(010),$$

$$b''^2 - aa' = -S^2(001),$$

$$ab - b'b'' = P^2_{100} \cdot P_{010} \cdot P_{001} (\cos \alpha - \cos \beta \cos \delta) = S(001) \cdot S(010) \cdot \cos \mu,$$

$$a'b' - bb'' = S(001) \cdot S(100) \cdot \cos \nu,$$

$$a''b'' - bb' = S(100) \cdot S(010) \cdot \cos \varpi;$$

On aura donc, après la substitution de ces valeurs dans la forme F,

$$\begin{aligned} -F &= g^2 S^2(100) + h^2 S^2(010) + k^2 S^2(001) \\ &\quad - 2ghS(100).S(010).\cos \varpi - 2gkS(100).S(001).\cos \nu - 2hkS(010).S(001).\cos \mu; \end{aligned}$$

donc aussi

$$F = -S^2(ghk) = -E^2 P^2 [ghk].$$

Ainsi la forme ternaire adjointe représente le carré de l'aire élémentaire du plan (ghk) pris avec le signe $-$. On voit aussi que, si la forme f se laisse représenter géométriquement par un Assemblage, sa forme adjointe F sera représentée de même par son Assemblage polaire, après toutefois que les paramètres du polaire auront tous été multipliés par l'intervalle moyen E, c'est-à-dire par la racine sixième du déterminant D pris avec le signe $-$.

L'analogie singulière qui existe entre les propriétés des formes binaires et ternaires, et les propriétés géométriques dont jouissent les Réseaux et Assemblages, a été signalée par M. Seeber, dans ses « Recherches sur les formes ternaires » (voyez le Journal de Crelle, tome XX, page 318).

THÉORÈME CV. — *Le volume du parallépipède élémentaire est le même dans l'Assemblage primitif et dans son polaire.*

Soient Ω le volume du parallépipède générateur de l'Assemblage donné, et $[\Omega]$ celui de son Assemblage polaire. On aura évidemment

$$[\Omega] = \frac{ab \sin \delta}{E} \frac{ad \sin \beta}{E} \frac{bd \sin \alpha}{E} \sin \mu \sin \nu \sin \delta,$$

a, b, d étant les paramètres de l'Assemblage primitif.

Or on a, d'autre part,

$$(74) \quad \begin{cases} \sin \beta \sin \delta \sin \mu = J, \\ \sin \alpha \sin \delta \sin \nu = J, \end{cases}$$

J étant toujours donné par l'équation (69). Donc

$$[\Omega] = \frac{a^2 b^2 d^2 J^2}{E^3},$$

et comme d'ailleurs

$$abd J = \Omega \quad (\text{équation 41}),$$

$$E' = \Omega \quad (\text{équation 54}),$$

il vient enfin

$$(75) \quad [\Omega] = \Omega.$$

Scolie. — L'Assemblage polaire a la même densité, c'est-à-dire la même richesse en Sommets, que l'Assemblage primitif; l'intervalle moyen E conserve la même valeur dans les deux Assemblages; ainsi

$$(76) \quad [E] = E.$$

THÉOREME CVI. — *En construisant l'Assemblage polaire d'un Assemblage polaire, on retombe sur l'Assemblage primitif.*

Déterminons l'aire élémentaire du Réseau du plan des $[yz]$ dans l'Assemblage polaire. Les deux paramètres, côtés du parallélogramme générateur, sont

$$\frac{ad \sin \beta}{E}, \quad \frac{ab \sin \delta}{E};$$

l'angle compris $[\alpha]$ est égal à $180^\circ - \mu$ (théorème C). Donc on aura

$$S[(100)] = \frac{a^2 bd \sin \beta \sin \delta \sin \mu}{E^2} = \frac{E a^2 bd \sin \beta \sin \delta \sin \mu}{\Omega}.$$

Or on a d'ailleurs

$$abd \sin \beta \sin \delta \sin \mu = abd J = \Omega;$$

donc

$$S[(100)] = Ea = EP_{100}.$$

On démontrerait de même que l'on a

$$S[(010)] = Eb = EP_{010},$$

$$S[(001)] = Ed = EP_{001}.$$

Si l'on construit, en direction, les axes de l'Assemblage qui est le polaire de celui construit sur Oa, Ob, Od (*fig. 39*), on retombe sur OA, OB, OD ; si l'on construit, en grandeur, les paramètres de ces axes, par les formules convenues (équations 63),

$$\frac{S[(100)]}{[E]}, \quad \frac{S[(010)]}{[E]}, \quad \frac{S[(001)]}{[E]},$$

à cause de $[E] = E$, on retombera sur les paramètres a, b, d , ou P_{100} , P_{010} , P_{001} . L'Assemblage ainsi obtenu coïncide donc avec l'Assemblage primitif.

THÉOREME CVII. — *Si ghk est le symbole d'une Rangée, dans un Assemblage, son plan normal sera un plan réticulaire de l'Assemblage polaire, et il aura $[(ghk)]$ pour symbole.*

Car on peut, d'après le théorème précédent, considérer l'Assemblage polaire comme étant l'Assemblage primitif, et le primitif comme étant le polaire de l'autre Assemblage : alors (théorème CIII), le symbole de la normale au plan (ghk) doit être $[ghk]$. Pour revenir à notre premier point de vue, il suffit de transporter les crochets $[]$ d'un symbole à l'autre, et l'on voit que le symbole de la normale au plan $[(ghk)]$ sera ghk : donc la Rangée ghk est normale au plan réticulaire $[(ghk)]$.

Corollaire. — Si $[ghk]$ est le symbole d'une Rangée du polaire, (ghk) sera celui de son plan normal, qui sera un plan réticulaire de l'Assemblage primitif.

Définition. — Les propriétés des Assemblages polaires dans l'espace ont leurs analogues sur le plan. A chaque Réseau correspond un *Réseau polaire*, que l'on obtient de la manière suivante :

Soient $Oa = a$, $Ob = b$ les deux paramètres, sur les axes Ox , Oy (*fig. 40*); soit δ l'angle xOy ; soit ϵ l'intervalle moyen donné par la formule

$$\epsilon^2 = ab \sin \delta.$$

Sur ce Réseau, et avec le paramètre ϵ normal au plan xOy , comme axe des z , que l'on construise un Assemblage, qui aura le Réseau du plan xOy pour base.

On aura

$$\Omega = \epsilon ab \sin \delta = \epsilon^3;$$

ainsi ϵ sera l'intervalle moyen des Sommets de cet Assemblage auxiliaire.

En construisant son Assemblage polaire, on voit que l'axe des $[x]$ sera la normale $O[x]$ à l'axe Oy , et que l'axe des $[y]$ sera la normale $O[y]$ à l'axe Ox . Soient donc $O[a] = [a]$, $O[b] = [b]$ les paramètres relatifs à ces axes; on aura

$$[a] = \frac{b\epsilon}{\epsilon} = b, \quad [b] = \frac{a\epsilon}{\epsilon} = a.$$

En construisant un Réseau sur ces paramètres, l'on obtiendra le *polaire* du Réseau donné. Si, maintenant, sur le prolongement de la droite $O[y]$, vous prenez $O[b'] = O[b]$, le Sommet $[b']$ appartiendra aussi au Réseau polaire; et comme l'on aura

$$O[a] = Ob, \quad O[b'] = Oa,$$

les triangles bOa , $[a]O[b']$ seront égaux. De là résulte le théorème suivant :

THÉORÈME CVIII. — *Un Réseau polaire dérive du Réseau primitif par une rotation de 90 degrés de celui-ci autour d'un des Sommets pris pour origine.*

Scolie. — Si, après cette rotation, l'axe des y positives devient l'axe des $[x]$ positives du Réseau polaire, l'axe des x positives deviendra l'axe des $[y]$ négatives : l'inverse aura lieu, si la rotation est effectuée en sens contraire.

THÉORÈME CIX. — *Tout Assemblage polaire possède les mêmes axes de symétrie que l'Assemblage primitif.*

Soit O (*fig. 41*) le Sommet commun aux deux Assemblages, origine des coordonnées; soient OO' un axe de symétrie de l'Assemblage primitif, et OP une des Rangées de l'Assemblage polaire, O et P étant deux Sommets voisins sur cette Rangée. Menons par O le plan RR' normal à OP , et qui sera un plan réticulaire de l'Assemblage primitif (théorème CVII, corollaire).

Soit maintenant q le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe OO' ; faisons tourner RR' autour de OO' de $\frac{360^\circ}{q}$, de $\frac{2.360^\circ}{q}$, $\frac{3.360^\circ}{q}$, etc.; on obtiendra autant de plans réticulaires de même espèce (théorème LXXXVIII), dont les normales seront aussi des Rangées de l'Assemblage polaire (théorème CIII). Ces normales s'obtiendront en faisant tourner OP autour de OO' d'angles égaux à $\frac{360^\circ}{q}$, $\frac{2.360^\circ}{q}$, etc.; dans ce mouvement, le point P viendra successivement en P' , en P'' , etc.; d'où l'on voit qu'il aura $q - 1$ Sommets homologues par rapport à l'axe OO' , et, comme P est un Sommet quelconque de l'Assemblage polaire, l'axe OO' sera un axe de symétrie d'ordre q dans ce dernier Assemblage.

Corollaire. — S'il existe des plans de symétrie dans l'Assemblage primi-

tif, ces plans seront aussi des plans de symétrie du polaire; car, à tout plan de symétrie correspond un axe de symétrie d'ordre pair, et cet axe devra se retrouver dans le polaire. Or, réciproquement, à tout axe de symétrie d'ordre pair correspond un plan de symétrie qui lui est normal; ainsi, ce plan de symétrie se retrouvera dans l'Assemblage polaire.

THÉORÈME CX. — *Si l'on centre tous les parallélépipèdes dont la réunion compose un Assemblage donné A, dont le polaire [A] est connu, et si l'on forme ainsi un nouvel Assemblage A', l'Assemblage obtenu, en centrant les six faces des parallélépipèdes polaires qui composent l'Assemblage [A], et agrandissant ensuite toutes ses dimensions dans le rapport $1 : \sqrt[3]{2}$, sera l'Assemblage polaire de A'.*

Soit Ω' le noyau de l'Assemblage A'; le volume de ce noyau sera égal évidemment à la moitié du volume de l'ancien noyau, de sorte que l'on aura

$$\Omega' = \frac{1}{2} \Omega.$$

Soient E et E' les intervalles moyens des Assemblages A et A'; l'on aura

$$E'^3 = \frac{1}{2} E^3, \quad E = E' \sqrt[3]{2}.$$

D'autre part, on a, dans le polaire de A', en distinguant par des accents les grandeurs qui se rapportent à l'Assemblage A' et à son polaire [A'],

$$P'[100] = \frac{S'(100)}{E'}, \quad P'[010] = \frac{S'(010)}{E'}, \quad P'[001] = \frac{S'(001)}{E'}.$$

Mais, comme les Réseaux sur les plans des yz , des xz et des xy ne sont pas troublés par le centrage, il vient

$$\begin{aligned} S'(100) &= S(100) = EP[100], \\ S'(010) &= S(010) = EP[010], \\ S'(001) &= S(001) = EP[001]. \end{aligned}$$

Donc, substituant, l'on aura

$$(77) \quad \begin{cases} P'[100] = \sqrt[3]{2} \cdot P[100], \\ P'[010] = \sqrt[3]{2} \cdot P[010], \\ P'[001] = \sqrt[3]{2} \cdot P[001]. \end{cases}$$

$P[100]$, $P[010]$, $P[001]$ représentent en grandeur et en direction les arêtes des trois faces contiguës du parallépipède générateur de l'Assemblage polaire $[A]$. Si, au contraire, on considère les plans diagonaux (110) , (101) , (011) , et spécialement ceux qui ont pour équation, dans l'Assemblage primitif,

$$x + y = 1, \quad x + z = 1, \quad y + z = 1,$$

on voit facilement que ces plans passent par le centre du parallépipède générateur : ainsi, les parallélogrammes des Réseaux de ces plans deviennent tous centrés, et l'aire de leur maille devient moitié moindre. On a donc

$$S'(110) = \frac{1}{2} S(110),$$

$$S'(101) = \frac{1}{2} S(101),$$

$$S'(011) = \frac{1}{2} S(011).$$

Donc

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} P'[110] = \frac{S'(110)}{E'} = \frac{E}{E'} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{S(110)}{E} = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{2} P[110], \\ \text{et de même} \\ P'[101] = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{2} P[101], \\ P'[011] = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{2} P[011]. \end{array} \right.$$

$P[110]$, $P[101]$, $P[011]$ représentent en grandeur et en direction les diagonales des trois faces contiguës du parallépipède générateur de l'Assemblage polaire $[A]$.

Des équations (77) et (78) on conclut qu'il faut, pour obtenir l'Assemblage $[A']$, multiplier par $\sqrt[3]{2}$ les dimensions du parallépipède générateur du polaire $[A]$, puis diminuer de moitié les paramètres des diagonales de ses six faces, ce qui s'obtiendra en centrant ces faces.

La première de ces deux opérations change le noyau Ω du polaire $[A]$ en $\Omega(\sqrt[3]{2})^3 = 2\Omega$. Par la seconde opération, le parallépipède générateur prend des bases et des hauteurs deux fois plus petites ; son noyau 2Ω devient donc égal à

$$\frac{1}{4} 2\Omega = \frac{1}{2} \Omega = \Omega',$$

c'est-à-dire égal au noyau de l'Assemblage A' . Le centrage de l'Assemblage $[A']$ ainsi obtenu est donc complet ; un centrage ultérieur, s'il pouvait

avoir lieu, rendrait la densité de $[A']$ supérieure à celle de A' , ce qui n'est pas possible (théorème CV, scolie). Donc $[A']$ est le polaire de l'Assemblage centré A' .

THÉORÈME CXI. — *Si l'on centre les faces des parallélépipèdes générateurs qui composent un Assemblage donné A dont le polaire $[A]$ est connu, pour former par ce centrage un nouvel Assemblage A' , on obtiendra le polaire $[A']$ de l'Assemblage A' , en centrant les parallélépipèdes polaires qui composent l'Assemblage $[A]$, et diminuant toutes ses dimensions dans le rapport $\sqrt[3]{2} : 1$.*

En général, soient M et N deux Assemblages qui soient le polaire l'un de l'autre; soit M_c ce que devient l'Assemblage M quand on centre tous ses parallélépipèdes; soit N_f ce que devient N lorsqu'on centre les faces de ses parallélépipèdes, polaires de ceux de M : il résulte du théorème précédent que M_c et N_f réunissent les conditions de dimensions relatives nécessaires pour être polaires l'un de l'autre; seulement, au lieu d'avoir

$$\text{noyau } M_c = \text{noyau } N_f,$$

on aura

$$(79) \quad \text{noyau } M_c = 2 \text{ noyau } N_f.$$

Alors, si l'on augmente les dimensions de N_f dans le rapport $\sqrt[3]{2}$ à l'unité, les noyaux deviennent égaux et les Assemblages sont réciproquement polaires (théorème précédent).

On peut obtenir le même résultat, en diminuant les dimensions de M_c dans le rapport $\sqrt[3]{2} : 1$; les noyaux deviennent égaux, et les Assemblages, réciproquement polaires.

Dans le cas actuel, posons $N = A$, $M = [A]$, $N_f = A'$; M_c sera l'Assemblage $[A]$ dont on a centré les parallélépipèdes, et M_c réduit dans ses dimensions suivant le rapport $\sqrt[3]{2} : 1$ sera le polaire de A' .

THÉORÈME CXII. — *Si l'on centre, dans les plans $z = 0$, $z = 1$, les bases des parallélépipèdes générateurs qui composent un Assemblage A dont le polaire $[A]$ est connu, on obtiendra le polaire de l'Assemblage à bases*

centrées A' , en centrant, sur les plans $[z] = 0$, $[z] = 1$, les bases de $[A]$, multipliant les paramètres, sur les axes des $[x]$ et des $[y]$, par le rapport $\sqrt[3]{2} : 1$, et celui de l'axe des $[z]$ par le rapport $\sqrt[3]{2} : 2$.

En appliquant la méthode employée pour la démonstration du théorème CX, on trouve

$$\begin{aligned}
 E &= E' \sqrt[3]{2}, \\
 S'(100) &= S(100) = EP[100], \\
 S'(010) &= S(010) = EP[010], \\
 S'(001) &= \frac{1}{2} S(001) = \frac{1}{2} EP[001], \\
 (80) \quad \left\{ \begin{aligned} P'[100] &= \sqrt[3]{2} \cdot P[100], \\ P'[010] &= \sqrt[3]{2} \cdot P[010], \\ P'[001] &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{2} \cdot P[001], \end{aligned} \right. \\
 S'(110) &= \frac{1}{2} S(110), \\
 S'(101) &= S(101), \\
 S'(011) &= S(011), \\
 (81) \quad \left\{ \begin{aligned} P'[110] &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{2} \cdot P[110], \\ P'[101] &= \sqrt[3]{2} \cdot P[101], \\ P'[011] &= \sqrt[3]{2} \cdot P[011]. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Des équations (80) et (81) on conclut qu'il faut multiplier par $\sqrt[3]{2}$ toutes les dimensions de l'Assemblage $[A]$, puis diminuer de moitié le paramètre relatif à l'axe des $[z]$, ainsi que le paramètre de la diagonale $[110]$; cette dernière opération équivaut à centrer les parallélogrammes sur le plan des $[xy]$.

La première opération change le noyau Ω de l'Assemblage $[A]$ en 2Ω ; la deuxième le divise par 2, et le ramène à la valeur Ω ; la troisième le divise par 2, et le rend égal à $\frac{1}{2}\Omega$: or telle est aussi la valeur du noyau de l'Assemblage A' . Donc l'Assemblage ainsi obtenu sera le polaire de A' .

PROBLÈME XXXII. — *Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage à symétrie binaire.*

Soient Oz l'axe binaire (*fig. 42*), et d son paramètre: soient $Ox = a$, $Oy = b$ et $xOy = \delta$.

Supposons d'abord le prisme non centré, et posons

$$(82) \quad abd \sin \delta = R^3;$$

E étant l'intervalle moyen, nous aurons

$$E^3 = R^3.$$

L'axe des $[z]$ coïncidera avec Oz ; les axes des $[x]$ et des $[y]$ seront situés dans le plan des xy , et l'on aura

$$[a] = E^2 \frac{1}{a \sin \delta} = \frac{d}{E} b,$$

$$[b] = E^2 \frac{1}{b \sin \delta} = \frac{d}{E} a,$$

$$[d] = E^2 \frac{1}{d} = \frac{E^2}{d^2} d.$$

Les axes des x, y, z étant conjugués, puisque le prisme droit n'est pas centré, les axes des $[x], [y]$ et $[z]$ le seront pareillement, et le générateur de l'Assemblage polaire sera un prisme droit à base parallélogrammique. Le Réseau du plan des $[x][y]$ sera le polaire du Réseau des xy , agrandi ou diminué, dans le rapport $d : E$.

Si le prisme générateur était centré (voyez le théorème LV), il faudrait centrer les faces du prisme polaire obtenu en ne tenant d'abord pas compte du centrage (théorème CX), et agrandir ensuite ses dimensions dans le rapport $1 : \sqrt[3]{2}$. On aurait ainsi pour générateur un octaèdre droit à base parallélogrammique, ou, ce qui revient au même, un prisme droit centré à base parallélogrammique. On trouve alors, pour les arêtes de ce dernier prisme,

$$[a] = R^2 \sqrt[3]{2} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \delta}}{2ab \sin \delta},$$

$$[b] = R^2 \sqrt[3]{2} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta}}{2ab \sin \delta},$$

$$[d] = R^2 \sqrt[3]{2} \frac{1}{d},$$

et, pour l'angle compris entre $[a]$ et $[b]$,

$$\text{arc} \left(\text{tang} = \frac{2ab \sin \delta}{a^2 - b^2} \right).$$

PROBLÈME XXXIII. — *Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage à symétrie terbinaire.*

Prenons pour axes coordonnés les trois axes de symétrie binaire. Soient a, b, d les paramètres des axes des x , des y et des z ; $[a], [b], [d]$ ceux des axes des $[x]$, des $[y]$ et des $[z]$. L'axe des $[x]$ coïncidera avec l'axe des x , l'axe des $[y]$ avec celui des y , et l'axe des $[z]$ avec celui des z .

Ceci posé, il peut se présenter quatre cas différents.

Si le prisme droit, à arêtes a, b, d , n'est pas centré, l'Assemblage polaire aura pour générateur un prisme droit à base rectangulaire.

Faisons, pour abréger,

$$(83) \quad abd = R^3;$$

nous aurons évidemment

$$(84) \quad E^3 = R^3,$$

$$[a] = E^2 \frac{1}{a}, \quad [b] = E^2 \frac{1}{b}, \quad [d] = E^2 \frac{1}{d}.$$

Si le prisme droit est centré en son centre de volume (cas où l'Assemblage peut être considéré comme dérivant de l'octaèdre droit à base rectangulaire), le polaire est un prisme droit, centré sur ses six faces, et l'on trouve facilement (théorème CX)

$$(85) \quad \begin{aligned} E^3 &= \frac{1}{2} R^3, \\ [a] &= R^2 \sqrt[3]{2} \frac{1}{a} = 2 E^2 \frac{1}{a}, \\ [b] &= R^2 \sqrt[3]{2} \frac{1}{b} = 2 E^2 \frac{1}{b}, \\ [d] &= R^2 \sqrt[3]{2} \frac{1}{d} = 2 E^2 \frac{1}{d}; \end{aligned}$$

le prisme construit sur $[a], [b], [d]$ doit ensuite être centré sur ses six faces, et alors il équivaudra à un octaèdre droit à base rhombe.

Si le prisme droit est centré sur ses six faces (cas où l'Assemblage peut être considéré comme dérivant d'un octaèdre droit à base rhombe), en vertu du théorème CXI, on retombe sur le prisme droit centré, lequel équivaut à l'octaèdre droit à base rectangulaire. Soient toujours a, b, d les arêtes

du prisme droit à faces centrées. On aura, d'après le théorème CXI,

$$(86) \quad \begin{aligned} E^3 &= \frac{1}{4} R^3, \\ [a] &= R^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} = 2 E^2 \frac{1}{a}, \\ [b] &= R^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \frac{1}{b} = 2 E^2 \frac{1}{b}, \\ [d] &= R^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \frac{1}{d} = 2 E^2 \frac{1}{d}; \end{aligned}$$

$[a]$, $[b]$, $[d]$ seront les arêtes du prisme droit rectangulaire, lequel, étant centré, deviendra le générateur du polaire cherché.

Enfin, si le prisme était centré sur deux de ses faces, par exemple sur ses deux bases (cas où l'Assemblage peut être considéré comme dérivant d'un prisme droit à base rhombe), on trouverait, en se conformant aux prescriptions du théorème CXII, et par des calculs analogues aux précédents,

$$[a] = 2 E^2 \frac{1}{a}, \quad [b] = 2 E^2 \frac{1}{b}, \quad [d] = E^2 \frac{1}{d};$$

puis l'on centrerait le rectangle construit sur $[a]$ et $[b]$; on aurait ainsi un nouveau prisme droit à base rhombe.

On peut aussi, pour ce dernier cas, s'appuyer sur la solution du problème XXXII. Faites, dans les calculs relatifs à ce problème,

$$a = a', \quad b = a', \quad E = E',$$

ce qui revient à prendre pour axes des x et des y les deux diagonales de la base rectangulaire centrée. Alors

$$(87) \quad \begin{aligned} E'^3 &= a'^2 d \sin \delta, \\ [a'] &= E'^2 \frac{1}{a' \sin \delta} = \frac{d}{E'} a', \\ [b'] &= E'^2 \frac{1}{a' \sin \delta} = \frac{d}{E'} a', \\ [d] &= E'^2 \frac{1}{d} = \frac{E'^2}{d^2} d, \end{aligned}$$

et l'angle du rhombe de la base du polaire sera $180^\circ - \delta$.

Corollaire I. — Le polaire du prisme droit à base rectangulaire est un prisme droit à base rectangulaire; celui du prisme droit à base rhombe est

un prisme droit à base rhombe : les deux rectangles, ou les deux rhombes, sont semblables.

Corollaire II. — L'octaèdre droit à base rectangulaire et l'octaèdre droit à base rhombe sont réciproquement polaires l'un de l'autre.

PROBLÈME XXXIV. — Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage ternaire, ou rhomboédrique.

Le polaire d'un Assemblage construit sur un rhomboèdre dont l'angle plan est égal à α , et l'angle dièdre égal à μ , est un autre rhomboèdre dont l'angle plan $[\alpha]$ (théorème C) est égal à $180^\circ - \mu$, et l'angle dièdre $[\mu]$ à $180^\circ - \alpha$ (*).

Le rhomboèdre primitif sera complètement défini, si l'on donne le paramètre a du Réseau à maille triéquiangle normal à l'axe ternaire, et le paramètre d de cet axe ternaire. On trouve alors, par des propriétés connues du rhomboèdre,

$$(88) \quad \begin{cases} \frac{1}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{d^2}{9a^2} + \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2(1 + \cos \mu)} = \frac{a^2}{4d^2} + \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Soient $[a]$ et $[d]$ les paramètres de même signification dans le rhomboèdre polaire; on aura

$$\frac{1}{2(1 + \cos [\mu])} = \frac{[a]^2}{4[d]^2} + \frac{1}{3};$$

or

$$1 + \cos [\mu] = 1 - \cos \alpha;$$

donc

$$\frac{d^2}{9a^2} = \frac{[a]^2}{4[d]^2};$$

donc enfin

$$(89) \quad \frac{a[a]}{2} = \frac{d[d]}{3},$$

relation qui exprime la condition pour que deux rhomboèdres soient semblables, chacun d'eux au polaire de l'autre.

Pour l'égalité des deux volumes, on a, en outre, la condition

$$(90) \quad E^3 = \frac{1}{6} \sqrt{3} a^2 d = \frac{1}{6} \sqrt{3} [a]^2 [d].$$

(*) C'est ce rhomboèdre que le professeur Weiss a appelé le rhomboèdre par inversion, « Invertirungs-Rhomboëder ». (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, t. XV, p. 93.)

On en conclura les valeurs de $[a]$ et $[d]$, savoir :

$$[a] = d \sqrt[3]{\frac{2a}{3d}} = 2 E^2 \frac{1}{a},$$

$$[d] = a \sqrt[3]{\frac{9a}{4d}} = 3 E^2 \frac{1}{d}.$$

PROBLÈME XXXV. — *Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage à symétrie quaternaire.*

Soient a, a les deux paramètres des côtés de la base carrée; soit d le paramètre de l'axe des z , axe de symétrie quaternaire.

S'il s'agit d'un prisme à base carrée, non centré, l'on aura

$$(91) \quad \begin{aligned} a^2 d &= R^3, & E^2 &= R^3, \\ [a] &= E^2 \frac{1}{a}, & [d] &= E^2 \frac{1}{d}; \end{aligned}$$

le polaire sera aussi un prisme à base carrée.

S'il s'agit d'un prisme centré à base carrée, le polaire sera un prisme centré à base carrée dont les éléments peuvent se déduire de la solution du deuxième cas du problème XXXIII. Dans les formules relatives à ce cas, faites $b = a$; vous trouverez un prisme droit centré à base carrée déterminé par les formules

$$(92) \quad \begin{aligned} E^2 &= \frac{1}{2} R^3, \\ [a] &= \sqrt{2} E^2 \frac{1}{a}, & [d] &= 2 E^2 \frac{1}{d}. \end{aligned}$$

PROBLÈME XXXVI. — *Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage à symétrie sénnaire.*

Le générateur de l'Assemblage est un prisme droit à base rhombe, dont les côtés sont a, a , l'angle compris δ égal à 120 degrés, la hauteur égale à d .

On trouve alors (voyez la solution du problème XXXIII, quatrième cas) que le générateur du polaire est un prisme droit à base rhombe, l'angle du rhombe étant $180^\circ - \delta$ ou 60 degrés, c'est-à-dire un prisme à symétrie sénnaire, comme on devait s'y attendre (théorème CIX).

Soient $[a], [a]$ les côtés du rhombe dans le prisme polaire, et $[d]$ la

hauteur: on aura, en appliquant les formules (87),

$$(93) \quad \begin{aligned} E^3 &= \frac{1}{2} \sqrt{3} a^2 d, \\ [a] &= \sqrt{\frac{4}{3}} E^2 \frac{1}{a}, \\ [d] &= E^2 \frac{1}{d}. \end{aligned}$$

On a, entre a , d , $[a]$ et $[d]$, les relations

$$(94) \quad \frac{a[a]}{2} = \frac{d[d]}{\sqrt{3}},$$

$$(95) \quad a^2 d = [a^2][d],$$

qui sont les analogues de (89) et (90).

Le Réseau du plan normal à l'axe sénnaire tourne de 90 degrés dans son plan, et se modifie quant à son paramètre minimum.

PROBLÈME XXXVII. — *Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage à symétrie terquaternaire.*

Si le générateur de l'Assemblage est un cube, son polaire aura pour générateur le même cube.

Si le générateur de l'Assemblage est un cube centré, de côté a , son polaire sera un cube à faces centrées (théorème CX), dont le côté $[a]$ sera donné par la formule

$$[a] = a \sqrt[3]{2}.$$

Réciproquement, si le générateur était un cube à faces centrées de côté a (ou octaèdre régulier de côté $a \sqrt{\frac{1}{2}}$), son polaire serait un cube centré (théorème CXI) de côté $[a]$, donné par l'équation

$$[a] = a \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi les deux derniers modes sont réciproquement polaires l'un de l'autre.

On pourrait aussi démontrer ces derniers résultats en considérant les rhomboèdres générateurs. Le rhomboèdre de 90 degrés a un angle plan de 90 degrés; il aura donc pour polaire un rhomboèdre de 90 degrés (solution du problème XXXIV).

Le rhomboèdre de $70^{\circ} 31' 44''$ a un angle plan de 60 degrés; il aura donc pour polaire le rhomboèdre de 120 degrés.

Le rhomboèdre de 120 degrés a un angle plan de $109^{\circ} 28' 16''$; il aura donc pour polaire le rhomboèdre de $70^{\circ} 31' 44''$.

Quoique le Mémoire qui précède puisse être considéré comme étant une pure spéculation géométrique, et que les relations qui y sont démontrées soient indépendantes des propriétés physiques des corps, cependant ce travail a été exécuté, par l'auteur, avec la pensée de s'en servir ultérieurement pour l'explication des faits fondamentaux de la cristallographie, et c'est vers ce but que sa rédaction a été spécialement dirigée.

Il a toujours été admis, depuis Haüy, soit implicitement, soit explicitement, que les centres des molécules des corps cristallisés sont distribués, à des intervalles égaux, suivant des séries rectilignes, parallèles aux intersections des plans de clivage. Le système géométrique formé par ces centres n'est donc rien autre chose que ce que nous avons nommé un « Assemblage de points », et toutes les considérations développées dans ce Mémoire lui sont applicables.

Si maintenant l'on admet qu'une cause quelconque intervienne pour disposer l'Assemblage qui se constitue, au moment de la cristallisation, à une structure symétrique plutôt qu'à une structure non symétrique, il est clair que l'Assemblage définitivement formé appartiendra à l'une de nos sept classes (page 88), et de préférence à l'une des six premières, qui possèdent seules des axes ou plans de symétrie. L'observation des corps cristallisés, naturels ou artificiels, prouve à *posteriori* qu'il en est ainsi; aussi la division géométrique des Assemblages correspond-elle fidèlement à celle qu'une étude patiente et attentive a porté à établir entre les différents systèmes cristallins.

Mais quelle est la cause de cette tendance des Assemblages, que forment les centres des molécules des cristaux, vers la régularité symétrique? C'est ce que j'essayerai d'expliquer dans un autre Mémoire dont la rédaction est aujourd'hui terminée, et qui, je l'espère, pourra être imprimé prochainement. Les principaux résultats de ce nouveau travail ont été commu-

niqués à la Société Philomathique, dans les séances des 17 et 24 mars, 19 mai, 7 juillet et 17 novembre 1849 (*voyez le Journal l'Institut*, année 1849, aux comptes rendus de ces séances). Le Mémoire que l'on vient de lire, ainsi que celui « Sur les Polyèdres de forme symétrique », imprimé dans le tome XIV du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, forment, en quelque sorte, les Prolégomènes de la théorie cristallographique qui s'y trouvera développée.

Je me borne à signaler dès à présent la forme polyédrale, ou, si l'on veut, polyatomique, de la molécule du corps cristallisé, comme déterminant le genre de symétrie de l'Assemblage cristallin correspondant; la même cause, suivie dans ses conséquences ultérieures, explique d'une manière simple l'ensemble des phénomènes de l'hémiédrie, de l'hémitropie et de l'isomorphisme. Si elle ne résout pas complètement le problème encore si difficile du dimorphisme, du moins elle indique comment l'on doit chercher à distinguer le dimorphisme de l'isométrie, et elle fait voir que, dans certains cas, le dimorphisme proprement dit, c'est-à-dire la cristallisation de molécules identiques dans deux systèmes cristallographiques distincts, suivant l'état du milieu ambiant, est un fait admissible, bien que contraire aux idées qui sont aujourd'hui le plus généralement adoptées en minéralogie.

Un Rapport sur le Mémoire actuel a été lu par M. Cauchy, à l'Académie des Sciences, le 6 août 1849 [*] (*voyez les Comptes rendus*, tome XXIX, page 133).

Qu'il me soit permis, en terminant, de remercier l'illustre rapporteur, de la bienveillance avec laquelle il a apprécié mon travail!

[*] Commissaires, MM. Biot, Beudant, Dufrénoy, Regnault, Lamé, Cauchy rapporteur.

MÉMOIRE

SUR

LE JAUGEAGE DES COURS D'EAU

A FAIBLE OU A MOYENNE SECTION,

PAR M. P. BOILEAU,

Capitaine d'Artillerie, ancien Élève de l'École Polytechnique, Professeur de Mécanique appliquée à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie, Membre de la Société d'encouragement pour l'Industrie nationale.

INTRODUCTION.

Les applications de l'Hydraulique aux travaux publics ou aux entreprises particulières sont nombreuses, toujours importantes et souvent difficiles ; mais aucune ne se présente avec un caractère plus évident d'utilité fondamentale que la mesure des eaux courantes. Soit que l'on considère, en effet, ces agents de richesse sociale comme destinés à animer des usines ; soit qu'on se propose de déterminer les proportions des passages de tout genre qu'ils doivent traverser, afin de leur assurer un écoulement toujours suffisant ; soit enfin qu'il s'agisse de dispenser la puissance fertilisante des irrigations : à l'origine de toutes les solutions se pose le problème de l'évaluation des volumes liquides débités dans chaque unité de temps, évaluation sur laquelle, en outre, sont basées les décisions des tribunaux dans un grand nombre d'affaires où de graves intérêts se trouvent compromis. Aucun sujet n'est donc plus digne de l'attention des savants et des ingénieurs : aussi voit-on depuis deux siècles les plus illustres d'entre eux témoigner de l'intérêt qu'il leur inspire.... « *Mi rallegro assai del progresso idraulico...* », écrivait Galilée (*) à l'abbé Castelli ; il ne s'agissait cependant encore que de quelques

(*) Lettre du 30 novembre 1625. Voir, à la bibliothèque de l'Institut, *Raccolta d'autori italiani che trattano del moto delle acque*. . 4^e édition, imprimée à Bologne.

considérations très-simples sur les vitesses d'écoulement, communiquées par ce dernier auteur, et dans lesquelles n'entraient, ni la nature des fluides, ni les phénomènes qui accompagnent leurs mouvements, phénomènes dont Léonard de Vinci avait fait, plus d'un siècle auparavant (*), une étude inspirée par le génie de l'observation. Bientôt, les expériences de Torricelli et celles de Mersenne apprirent que la dépense des petits orifices est proportionnelle à la racine carrée, ou, comme on disait alors, à *la raison sous-double* des charges : plus tard, Newton consacrait quelques loisirs à la contraction des veines liquides et à son influence sur le débit des orifices; Poleni, Mariotte, Daniel Bernouilli, Borda, les deux Michelotti, Bossut, Dubuat, Hachette, Eytelwein, Bidone, ont fourni d'utiles résultats d'expériences concernant le débit des petits orifices carrés et circulaires, ou celui des déversoirs. Daniel Bernouilli, dans son *Hydrodynamique*, a préparé les méthodes pratiques de calcul que l'on suit encore. Borda a donné la véritable expression des pertes de force vive qui résultent des changements brusques de dimensions dans les conduites des fluides. Dubuat, complétant les idées de Bossut et de Chézy, a posé les véritables conditions du mouvement uniforme dans les canaux; enfin, Prony, appliquant la fonction par laquelle Coulomb représentait la résistance des parois dont Guglielmini avait, cent ans auparavant, signalé l'influence, a composé des Tables numériques qui ont servi pour l'établissement des canaux et des tuyaux de conduite destinés à débiter un volume liquide déterminé. Mais les recherches

(*) Voir le recueil précité. Léonard de Vinci a particulièrement décrit, avec beaucoup de soin et pour des cas variés, les mouvements des particules autour des corps solides immergés, ainsi que ceux qui résultent des coudes et des changements brusques de dimensions des conduites; il a indiqué la convergence des filets dans les veines liquides et les nappes des déversoirs avec contraction latérale. On trouve dans son Mémoire un appareil pour faire des expériences sur la dépense des petits orifices et le flotteur double destiné à observer les différences de vitesse dans une section d'un cours d'eau, instrument attribué à Mariotte par les auteurs modernes . . . J'ai pour principe, dit-il, de » citer d'abord l'expérience, et ensuite de démontrer pourquoi les corps sont forcés de se comporter » de telle ou telle manière.... Parole admirable à une époque de dogmatisme obscur! Mais la logique des sciences ne devait être créée qu'un siècle plus tard par Bacon et Descartes, et si les inductions de Léonard de Vinci présentent parfois de brillants éclairs, elles ne seraient généralement plus admises de nos jours. Enfin, il manque aux observations de l'immortel artiste, le chiffre, la donnée numérique précise.

d'Hydraulique expérimentale n'étaient pas encore généralement exécutées avec la rigueur des moyens d'observation, l'esprit de continuité, la philosophie critique qui avaient imprimé aux autres branches de la physique une puissante impulsion, lorsque M. Poncelet, dans ses expériences faites à Metz en commun avec M. Lesbros (*), a donné aux ingénieurs l'exemple d'une investigation exacte, circonstanciée et dégagée d'influences anormales.

Énumération des méthodes pratiques de jaugeage. — Les moyens employés pour déterminer le débit des cours d'eau sont variés; aucun n'est susceptible de fournir des résultats rigoureux; mais plusieurs peuvent conduire à une approximation pratique suffisante lorsqu'ils sont appropriés aux dimensions, au volume et au régime du courant. Pour les canaux à petites vitesses, à pente et à section constantes, exempts d'obstacles intérieurs sur une étendue considérable en amont et en aval de la région considérée, on peut déduire de l'équation du mouvement uniforme ou des Tables de Prony, la valeur de la vitesse moyenne et, par suite, du débit par seconde, qui est le produit de l'aire de la section par cette quantité. S'il s'agit d'une rivière large et profonde, il faut choisir une portion régulière de son cours dont les rives soient sensiblement parallèles, et le lit non embarrassé de plantes fluviales; s'assurer que le niveau y reste sensiblement constant pendant la durée des opérations; en relever une section perpendiculaire au mouvement général de transport; mesurer, par un temps calme, à l'aide des instruments hydrométriques, les vitesses des particules fluides sur cinq verticales au moins de cette section, situées respectivement près des deux rives, au milieu de la largeur, puis entre celles-ci et les précédentes; enfin, déduire de ces vitesses, par une méthode exacte, le débit du courant. Mais les observations à effectuer sont longues, délicates, et exigent l'emploi d'appareils très-précis; de sorte que ce mode de jaugeage ne doit être employé que dans des circonstances qui n'en permettent pas de plus simples.

On sait que Dubuat, opérant dans un canal à régime sensiblement uniforme, dont la section, tantôt rectangulaire et tantôt trapézoïdale, avait 0^m,487 de largeur supérieure, et dans lequel la profondeur d'eau a varié

(*) *Expériences sur les lois de l'écoulement de l'eau à travers les orifices rectangulaires verticaux en minces parois planes.* (Paris, 1832.)

de $0^m,08$ à $0^m,27$, a comparé les vitesses moyennes, obtenues par un jaugeage direct, aux vitesses du milieu de la surface, et que Prony a représenté l'ensemble des résultats obtenus par une formule d'interpolation qui fournirait un précieux procédé de jaugeage si l'emploi n'en devait être restreint aux circonstances de régime et de dimensions qui y ont donné lieu, comme le prouvent les recherches expérimentales que nous avons faites à cet égard et les savants calculs de M. Sonnet (*).

On n'aura donc, probablement pendant longtemps encore, d'autre procédé simple et pratique de jaugeage que celui qui consiste à faire passer le courant par des orifices disposés à l'avance, procédé qui ne s'applique pas aux cours d'eau à grande section. Souvent ces orifices existent par suite de l'établissement d'une ou de plusieurs usines, mais bien rarement ils présentent des circonstances identiques à celles d'expériences antérieures; de sorte que l'on ne connaît pas, avec une certitude suffisante, les coefficients qu'il convient d'appliquer aux formules théoriques de l'écoulement des liquides. Il faut donc, en général, que l'ingénieur chargé du jaugeage d'un cours d'eau à section faible ou moyenne établisse lui-même les orifices dont il doit se servir, en barrant transversalement ce cours d'eau. Il peut laisser le volume liquide s'écouler en déversoir par-dessus le barrage, ou bien ouvrir des orifices avec charge sur le sommet (**). Le présent Mémoire a pour objet l'exposition complète des données physiques, des formules et des résultats numériques nécessaires pour appliquer l'un et l'autre de ces

(*) *Recherches sur le mouvement uniforme des eaux dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts.* (Paris, 1845.)

(**) Un ingénieur civil qu'une mort honorable a prématurément enlevé à d'utiles travaux, M. Lapointe, de Metz, a proposé d'ouvrir dans le barrage qui retient les eaux, de larges orifices circulaires prolongés par un court tuyau en fonte, noyé en aval; un moulinet à ailettes hélicoïdes plongé dans l'axe de ce tube et communiquant son mouvement de rotation à un compteur exécutait, par seconde, un nombre n de tours qui donnait le débit Q de l'orifice dans le même temps, par la relation $Q = a + bn$. (Voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXV, page 620.) Mais, le barrage étant établi, les praticiens préféreront sans doute faire couler l'eau en déversoir et se dispenser de l'installation d'un instrument d'ailleurs assez coûteux; en outre, la taré d'un moulinet dont la transmission de mouvement est fréquemment démontée et remontée laisse toujours quelque incertitude sur sa permanence après un usage prolongé. La véritable utilité de l'appareil dont il s'agit, paraît devoir consister dans son emploi comme *compteur d'eau*, dans les distributions des villes, emploi qui a été indiqué par M. Morin.

deux procédés de jaugeage qui suffisent pour les courants moteurs des usines et les canaux d'irrigation. Relativement aux grands cours d'eau, dans lesquels la construction d'un barrage serait difficile, dispendieuse et le plus souvent rendue impossible par les besoins de la navigation, nous avons déjà fourni un certain nombre de données nouvelles (*) qui ont été jugées utiles et que nous nous proposons de compléter prochainement.

DESCRIPTION DE L'OBSERVATOIRE HYDRAULIQUE ETABLI A METZ, EN 1846 (**).

Emplacement et réservoir principal. — L'eau est prise dans les fossés du front Saint-Vincent, vaste réservoir qui a servi en 1827 et 1828 aux belles expériences de MM. Poncelet et Lesbros, agrandi encore depuis cette époque, et communiquant par un canal souterrain à la haute Moselle : le niveau y est entretenu constant au moyen d'un grand déversoir en maçonnerie qui le sépare des fossés du front de Chambière.

Réservoir particulier. — Afin d'opérer sous des charges d'eau déterminées et variables à volonté, tout en laissant constant le niveau du réservoir principal, on a causé dans le terre-plein du redan 62 du chemin couvert un

(*) La première partie de ces recherches, qui a été honorée de l'approbation de l'Académie des Sciences (voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tomes XXII et XXIII), contient : un examen comparatif des propriétés des instruments hydrométriques en usage ; plusieurs séries d'expériences relatives à un nouvel *hydrodynamomètre* ; un procédé simple et général pour tarer ces divers instruments, question fondamentale qui n'avait point encore de solution exacte ; l'étude des phénomènes variés que fait naître la rencontre d'un courant liquide contre un prisme mince immergé complètement ou partiellement ; des notions nouvelles sur l'amplitude de la sphère d'activité des mouvements des molécules autour du prisme et sur les variations de l'action dynamique du courant ; enfin des résultats d'observation concernant la loi de distribution des vitesses dans la section transversale d'un cours d'eau à régime uniforme et l'influence perturbatrice du vent. La seconde partie, présentée récemment à l'Académie des Sciences, contient principalement la description d'un nouvel instrument hydrométrique construit de manière à troubler le moins possible les mouvements moléculaires à l'endroit où il fonctionne, et une méthode de calcul pour déduire, de l'observation d'un certain nombre de vitesses dans la section d'un cours d'eau quelconque, le volume fluide qu'il débite.

Nos recherches d'Hydraulique physique et expérimentale, entreprises en juillet 1845, ont été exécutées aux frais du département de la Guerre sur l'avis favorable du Comité de l'Artillerie.

(**) N'ayant pu, par suite de circonstances exclusivement locales, conserver l'emplacement affecté aux recherches de 1845, j'ai dû recommencer des constructions longues et pénibles, mais dans lesquelles j'ai tâché de mettre à profit l'expérience acquise.

réservoir particulier dont la première partie, de forme rectangulaire, a 20 mètres de longueur et 6 mètres de largeur par le haut; avec des talus à terre coulante.

La seconde partie, de 7 mètres de long, raccorde la première avec l'entrée du canal d'expériences, et ses côtés se terminent, vers cette entrée, par une surface gauche revêtue en bois, suivie d'une portion rectangulaire en madriers, à parois verticales et à fond incliné, qui complète le raccordement, afin d'amener, sans aucune contraction, les molécules liquides dans le canal : ce réservoir a, dans toute son étendue, 1 mètre de profondeur, de sorte qu'il peut contenir 120 mètres cubes d'eau. Un canal de décharge en terre part de ce réservoir pour aboutir à la basse Moselle. On introduit l'eau par deux pertuis, sur la construction et le but desquels nous donnerons plus loin quelques détails.

Canal d'expériences. — Le canal d'expériences a été établi dans une tranchée profonde, de 3 mètres de largeur au fond, que le relief du terrain a rendu nécessaire; sa section est rectangulaire, il a 70 mètres de longueur et se compose : 1° d'une partie à parois parallèles dont la largeur intérieure est 0^m,900; 2° d'une portion divergente de 3^m,840 de longueur; 3° d'un bief à parois parallèles de 2^m,800 de longueur et de 1^m,600 de largeur intérieure. Le fond de ce canal est plan, à pente uniforme et variable à volonté, comme on va le voir; il traverse une grande baraque qui sert d'atelier et d'abri. Une autre baraque sert de magasin.

Bassin de jauge. — Le canal d'expériences est suivi d'un bassin de jauge J (*fig.* 1 et 2) en maçonnerie, qui se décharge dans un canal de fuite aboutissant à la basse Moselle. Un appareil mobile V sert à conduire les eaux du canal d'expériences dans le bassin de jauge ou à les verser dans un premier canal de fuite ABCD, qui rejoint le dernier TU. Enfin un petit ruisseau EF, creusé dans le fond de la tranchée, recueille et conduit les eaux de pluie ou de filtrations.

Construction du canal d'expériences. — Le canal d'expériences est construit en madriers de sapin de 0^m,050 d'épaisseur, par travées de 3^m,550 de longueur. Chaque travée est maintenue à ses extrémités et en son milieu par un cadre ABCD (*fig.* 3) en bois de chêne, formé d'une traverse AB et de deux montants AC, BD, de 0^m,120 d'équarrissage, reliés à leur partie supé-

rieure. On a proportionné les traverses inférieures AB de manière que la largeur du canal pût être facilement portée à 1^m,600 ; il suffirait pour cela de démonter le côté *dbBD* et de le transporter en E, où une mortaise a été préparée à cet effet, après avoir ajouté au fond un panneau de trois madriers. En dessous de la traverse AB sont fixés deux coins en chêne de 0^m,500 de longueur, 0^m,130 d'épaisseur à l'une des extrémités et 0^m,030 à l'autre, qui reposent sur deux coins A', B', égaux à ceux-ci et placés symétriquement ; ces deux derniers coins sont mobiles et servent à régler la pente du canal qui est de $\frac{1}{1000}$ quand leurs faces supérieures coïncident dans toute leur étendue avec les faces inférieures des coins fixes. Tout le système est porté par une forte semelle en chêne FG, placée elle-même sur un terrain solide, et boulonnée sur deux grands piquets en chêne. Les madriers du canal sont assemblés entre eux au moyen de rainures dans lesquelles on a chassé des languettes en chêne très-sec de 0^m,010 d'épaisseur et de 0^m,020 de largeur ; ces languettes rapportées ont l'avantage de donner un assemblage plus solide et de laisser aux madriers toute leur largeur : avant de les placer, on remplissait les rainures de peinture à huile. Le joint des bouts de madriers entre deux travées a été rempli avec des étoupes serrées au ciseau et recouvertes de brai de calfatage. Toutes les parois du canal ont été enduites de colthar, à l'exception de la partie où se font les principales observations, qui a été peinte en blanc à l'intérieur.

Appareil mobile de communication avec le bassin de jauge. — L'appareil V, qui sert à établir ou interrompre à volonté la communication du canal avec le bassin de jauge, est une sorte de tiroir (*fig. 1 et 2*) roulant par l'intermédiaire de quatre galets sur un châssis fixe en chêne solidement construit ; l'extrémité antérieure du fond *aba'b'* porte en saillie un liteau à biseau *cc'*, qui vient s'appliquer sur un biseau parallèle pratiqué au bord extrême du canal : les côtés verticaux du tiroir portent également deux biseaux *dd'* qui correspondent à deux biseaux semblables sur les faces verticales du canal. Le contact de ces surfaces, même frottées de suif, ne suffirait pas pour arrêter toute fuite d'eau ; mais on a complété le système par une planchette horizontale *ee'*, et deux verticales *ff'* fixées à l'extrémité du canal et qui couvrent les joints du système mobile.

Pour la manœuvre, deux hommes prennent les poignées *gg'* et, au com-

mandement que leur fait l'observateur muni d'un chronomètre, ils font marcher le tiroir vers le canal ou vers le bassin de jauge, selon que l'on veut établir ou interrompre la communication entre ces deux parties de l'établissement.

Cet appareil a l'avantage de n'occasionner ni perte de chute dans le système hydraulique, ni erreur sensible de temps dans l'observation.

Construction du bassin de jauge. — Le bassin de jauge a 6 mètres de longueur intérieure, 3 mètres de largeur et 1^m,550 de profondeur. Placé dans un terrain de gravier ancien très-solide, il est en outre assis sur un massif de 0^m,600 d'épaisseur avec 0^m,200 d'empattement ; ses murs verticaux ont 0^m,750 d'épaisseur. Le tout est construit en maçonnerie de moellons bruts, avec mortier de ciment moyen, revêtu à l'extérieur d'un crépi, et à l'intérieur d'un enduit de 0^m,050 d'épaisseur, en ciment fin. Rien n'a été négligé pour obtenir l'imperméabilité, qui a été constatée par des épreuves décisives.

Les vannes laissant toujours échapper de l'eau, quelque bien construites qu'elles soient, on a adopté, pour vider ce bassin, un système composé de deux tuyaux recourbés en fonte *mnq* de 0^m,160 de diamètre intérieur (*fig. 1* et *2*), maçonnés dans le massif inférieur du bassin, et de deux soupapes en bronze *mo*, *m'o'*, dont la cuvette est soudée à la partie supérieure de ces siphons, qui affleure le fond incliné du bassin. Ces soupapes sont manœuvrées au moyen de deux leviers supérieurs *ps*, *p's'*, posés sur une charpente *k* : on ne se sert habituellement que de l'une d'elles, l'autre étant réservée pour les cas d'accidents. Enfin elles sont entourées d'une cage *t* en fil de laiton pour empêcher l'approche des corps solides qui pourraient compromettre l'exactitude de la fermeture.

Écran de calme. — Afin de perdre le moins de temps possible dans chaque opération, on a établi en travers du bassin un écran *CD* destiné à diminuer les fluctuations produites par le choc de l'eau qui y tombe.

Opération du jaugeage. — Pour mesurer la hauteur dont le niveau s'élève dans chaque jaugeage, on a employé un prisme en sapin *ah* à section octogonale, glissant contre un madrier vertical *AB* et guidé en outre par trois ferrures *i*, *d*, *u*. L'extrémité inférieure de ce prisme est garnie d'une douille conique *h* en cuivre bien poli qui se reflète dans l'eau ; on amène

d'abord avec précaution, et par un mouvement très-lent, la pointe de cette douille au contact de la couche de liquide laissée dans le fond du bassin, et l'on serre la vis de pression v dont est munie la coulisse du milieu u . Le prisme étant ainsi arrêté, on fait glisser, contre une ferrure fixe qui détermine un plan horizontal, la surface inférieure d'un prisme bien dressé dans lequel est enchâssé un crayon cylindrique dont la pointe trace un trait fin et horizontal sur la face verticale correspondante du prisme.

En répétant cette opération quand le bassin est rempli, et le style étant toujours placé de la même manière, on n'a plus qu'à mesurer la longueur comprise entre les deux traits, qu'on efface facilement ensuite. Cette mesure était faite au moyen d'un mètre-étalon en fer ayant servi autrefois à M. Poncelet, et posé horizontalement sur le bord du canal.

Règlement de l'alimentation. — Dans mes premières recherches expérimentales sur les cours d'eau (*), j'ai déterminé la construction d'un orifice d'aval dont l'idée première avait été conçue par Dubuat, orifice qui, placé à l'extrémité du canal, en réglait le régime uniforme, et que j'ai nommé, par ce motif, *pertuis régulateur*. Par suite des dimensions du nouveau canal, des fortes dépenses d'eau qu'on voulait y faire et de sa disposition par rapport au réservoir, il s'agissait ici de compléter la réglementation du système hydraulique de façon que l'introduction de grandes masses d'eau n'y apportât aucun mouvement perturbateur. On concevra l'importance de cette question en considérant la force vive considérable que possèdent les courants issus d'une vanne ordinaire, soit sous une forte charge, soit avec de grandes ouvertures : ces courants, rencontrant la masse contenue dans le réservoir, y exciteraient des mouvements ondulatoires périodiques qui, en se transmettant jusqu'au lieu où se font les expériences, troubleraient les vitesses des molécules liquides et mèleraient une influence anormale à celle des éléments réguliers de variation de ces vitesses.

M. Poncelet, qui, le premier, a fait ressortir la nécessité de modérer le mouvement de l'eau dès son entrée, a, depuis plusieurs années, indiqué un moyen fort ingénieux d'atteindre ce but et d'obtenir en même temps un réservoir à niveau constant.

(*) Voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tomes XXII et XXIII. XXXIII^e Cahier.

L'appareil consiste en une caisse profonde A (*fig. 4*) placée en tête du réservoir ou canal d'expériences B, et vers le fond de laquelle aboutissent un ou plusieurs tuyaux conduisant l'eau d'alimentation : la partie de ces tuyaux qui pénètre dans la caisse A ne donne passage au liquide que par de très-petits orifices, en grand nombre, dont est percée une enveloppe E, occupant toute la largeur de cette caisse ; un robinet, adapté à la branche verticale du tuyau, permet de régler la dépense. On obtient ainsi dans le bief supérieur B un niveau constant à surface parfaitement plane. Il y a dans cet appareil deux moyens d'éteindre la force vive du liquide affluent, qui consistent : 1° à diviser la masse en parties très-ténues dont les chocs isolés ne peuvent produire qu'une faible impulsion, et 2° faire remonter les molécules à une hauteur suffisante pour détruire les mouvements irréguliers qu'elles ont conservés.

Pertuis modérateur. — J'ai tâché d'appliquer ces idées à l'alimentation par grandes vannes de mon réservoir, et j'ai adopté à cet effet deux dispositifs différents entre eux, mais remplissant également le but. Le plus simple de ces dispositifs est appliqué à la vanne de 1 mètre de largeur ; il consiste en un palier horizontal établi en aval au niveau du seuil de l'orifice, et suivi d'un plan incliné au $\frac{1}{6}$, de 3 mètres de longueur : toute la partie du pertuis correspondante à ce plan s'avance dans le réservoir ; la veine liquide lancée par l'orifice remonte le plan incliné, en s'écoulant toutefois partiellement sur les côtés et dans des directions perpendiculaires à sa vitesse initiale, par de petits orifices quadrangulaires formés au moyen d'un lattis croisé fixé à ce plan incliné ; à l'extrémité supérieure du même plan, la partie de la veine qui y parvient rencontre un autre lattis en pente roide, par les ouvertures duquel elle achève de s'écouler, mais avec une vitesse ralentie par l'action de la pesanteur. La portion adjacente du réservoir est remplie de petits tourbillons qui s'éteignent bientôt, de sorte qu'à une faible distance, l'eau est tranquille. Il ne faut, pour construire cet appareil, que quelques lattes et quelques planches.

Autre pertuis modérateur. — L'autre dispositif modérateur, appliqué à la vanne de 1^m,700 de largeur, a exigé un peu plus de frais de construction. A la suite d'un palier horizontal SA (*fig. 5*), de niveau avec le seuil de l'orifice, est une excavation ABCD, de 1^m,800 de profondeur, et dont le

fond BC a 1^m,450 de largeur ; la paroi AB de cette excavation, qui suit le palier, est verticale, et la face CD du côté du réservoir est inclinée à 2 de hauteur sur 1 de base ; les parois latérales sont verticales ; cette cavité est partagée en deux portions par un écran vertical FG placé à 0^m,500 de la paroi AB et glissant entre des rainures, de façon qu'on puisse faire varier la hauteur GH de l'ouverture qu'il laisse au-dessous de lui.

L'eau lancée par la vanne vient frapper l'écran, tourbillonne et tombe pour remonter ensuite avec une vitesse verticale de plus en plus affaiblie par l'action de la pesanteur et l'élargissement progressif des sections qu'elle occupe.

Détermination de la tare du bassin de jauge.

Premier procédé. — La régularité de sa construction m'a d'abord engagé à déterminer la capacité de ce bassin par la mesure directe de ses dimensions. A cet effet, j'ai tracé, sur les parois intérieures, quatre lignes de niveau équidistantes, déterminant chacune un parallélogramme dont j'ai mesuré la base, puis la perpendiculaire à cette base aux deux extrémités et au milieu de sa longueur. Voici les résultats de cette opération :

| | | | | |
|---|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Longueur des bases des parallélogrammes. . . . | ^m 6,023 | ^m 6,018 | ^m 6,029 | ^m 6,025 |
| Valeur moyenne de leurs hauteurs. | 3,011 | 3,010 | 3,009 | 3,006 |
| Aire des sections horizontales correspondantes. | 18,13525 | 18,11418 | 18,14126 | 18,11115 |

Ces valeurs différant très-peu entre elles et sans ordre bien déterminé de variation, on peut en prendre la moyenne, qui est 18,12546. De cette aire il faut retrancher la somme des sections horizontales des appareils prismatiques de jaugeage établis dans le bassin, c'est-à-dire 0,132389 ; ainsi, la tare du bassin de jauge serait de 17^{mc},993 par mètre de hauteur d'eau.

Deuxième procédé. — J'ai fait construire une caisse parallélipédique en madriers de sapin, avec montants et nervures extérieures en chêne de fort équarrissage, dont les dimensions horizontales intérieures sont de 1 mètre, et la hauteur 1^m,080 ; le fond est percé d'un orifice garni d'une soupape ou clapet en bronze parfaitement ajustée ; les parois ont été enduites de colle marine à l'intérieur, et de peinture à l'huile extérieurement, les angles calfatés avec du brai gras. Cette caisse était placée verticalement sur l'un des murs du bassin de jauge, l'orifice du fond correspondant à l'intérieur de ce

bassin. Une traverse, fixée sur les bords supérieurs de la caisse, portait un écrou dans lequel se mouvait une vis terminée par une pointe très-fine, correspondant au centre de cette caisse, et qu'on a fait arriver à 1 mètre au-dessus du fond, puis rendue fixe. Un couloir intérieur vertical, percé à sa partie inférieure de petits orifices, permettait de remplir la caisse sans agitation du liquide; lorsque la surface de l'eau approchait de la pointe de la vis, on versait avec précaution, et très-lentement, jusqu'à ce que cette surface vînt affleurer la pointe; on s'assurait qu'elle était bien tranquille, puis on vidait toute l'eau dans le bassin de jauge au moyen de la soupape de fond; enfin, on mesurait l'élévation de niveau occasionnée par l'addition de ce volume, en employant les procédés décrits précédemment. Or l'aire horizontale libre dans la caisse, mesurée en trois endroits de sa hauteur, a été trouvée de $0^{\text{m}},9968$; d'un autre côté, cette caisse a été vidée dix-huit fois dans le bassin, et les élévations de niveau observées différaient extrêmement peu entre elles: leur somme était $0^{\text{m}},9954$; d'où il résulte, pour la tare moyenne du bassin de jauge, $\frac{0,9968 \times 18}{0,9954}$ ou $18,025$.

Troisième procédé. — On a fermé l'extrémité d'aval du canal d'expériences au moyen d'un barrage vertical, dans le milieu de la longueur duquel on a fixé l'orifice carré de $0^{\text{m}},20$ de côté, qui a servi, en 1827 et 1828, aux expériences de MM. Poncelet et Lesbros; le seuil de cet orifice a été placé à $0^{\text{m}},30$ au-dessus du fond du canal, qui formait en cet endroit un bief rectangulaire de $1^{\text{m}},612$ de largeur. Cela fait, on a alimenté, au moyen du canal, ce réservoir rempli jusqu'à une hauteur au-dessus de l'orifice, qui va être indiquée; puis, le régime permanent étant acquis par le courant, on en a recueilli le produit dans le bassin de jauge en mesurant le temps de l'écoulement et l'élévation du niveau dans ce bassin. D'un autre côté, on a calculé le volume débité dans une seconde par l'orifice, en appliquant à la formule connue

$$Q = \omega \sqrt{2g \frac{h}{1 - \frac{\omega^2}{O^2}}}$$

le coefficient $0,5953$, moyenne de trois résultats obtenus par MM. Poncelet et Lesbros, pour une charge de $0^{\text{m}},242$ sur le centre de l'orifice, et l'on en a déduit la tare moyenne du bassin de jauge, d'après les éléments suivants :

| CHARGES sur le centre de l'orifice <i>h.</i> | DÉPENSE calculée, en mètr. cubés. | ÉLÉVATION du niveau dans le bassin de jauge. | DURÉE de l'observation. | AIRE MOYENNE horizontale du bassin de jauge. |
|---|---|---|----------------------------|---|
| m 0,222 | m 0,0497337 | m 0,985 | 356" | 17,9747 |
| 0,2245 | 0,0500122 | 1,001 | 360 | 17,9869 |
| 0,227 | 0,050288 | 1,039 | 372 | 18,0049 |
| Moyenne générale..... | | | | 17,9888 |

En résumé, nous avons obtenu, pour la tare du bassin de jauge :

| | |
|-------------------------------|--------|
| Par le premier procédé..... | 17,993 |
| Par le deuxième procédé. | 18,025 |
| Par le troisième procédé..... | 17,989 |
| Moyenne..... | 18,002 |

C'est cette valeur moyenne que nous avons définitivement adoptée; elle ne diffère que de $\frac{1}{783}$ de la deuxième, qui s'en écarte le plus.

PREMIÈRE PARTIE.

JAUGEAGE DES COURS D'EAU.

MÉTHODE DES DÉVERSOIRS.

Choix d'un barrage-type. — La première condition à remplir était d'adopter, pour le déversoir jaugeur, un dispositif facile à reproduire exactement dans tous les cas, et ne pouvant donner lieu à aucune influence anormale; la seconde, que les données d'observation s'obtinssent très-simplement dans la pratique, et que le calcul des volumes liquides fût, s'il était possible, débarrassé de la considération des coefficients de correction jusqu'alors en usage, coefficients qui, variant tantôt dans un sens et tantôt dans le sens inverse, suivant les circonstances diverses de l'écoulement, eussent exposé à des méprises les observateurs peu exercés, ou, au moins, exigé des collections étendues de résultats numériques.

Circonstances générales des expériences. — A cet effet, nous avons supprimé la contraction latérale en faisant occuper à l'orifice toute la largeur du cours d'eau; nous avons adopté un barrage vertical en madriers, et nous l'avons terminé par une arête vive S (*fig. 6*) et un glacis *sa* tourné vers l'aval, que les ouvriers forment en traçant, sur les bouts du madrier supérieur équarri et bien dressé, la diagonale *sa* du carré *sade*, qui a pour côté l'épaisseur de ce madrier, puis retranchant le prisme *sad*. La crête S du barrage était horizontale, et l'on mastiquait les joints pour éviter toute fuite d'eau. Lorsqu'on a opéré dans le canal de 0^m,900 de largeur, le déversoir était placé à 60 mètres de l'origine de ce canal, dont le fond avait une pente de $\frac{1}{1000}$. Lorsqu'on s'est servi du bief rectangulaire d'aval (*voir la description précédente*), le barrage avait une largeur de 1^m,600, et se trouvait à 9 mètres environ de l'emplacement du premier. Les expériences ont été exécutées du 15 juillet au 15 octobre des années 1846 et 1847 (*); la température de l'eau s'est peu écartée de 16 degrés centigrades. On a évité d'opérer sous l'influence de vents assez forts pour troubler sensiblement les résultats. La durée de l'écoulement dans le bassin de jauge était appréciée à l'aide d'un chronomètre à demi-secondes de Bréguet. Enfin, après chaque expérience, on en critiquait les résultats par des constructions graphiques, afin d'être en mesure de recommencer, séance tenante, celles qui présentaient des anomalies.

On a considéré dans ces recherches tous les cas qui peuvent se présenter en pratique; savoir :

Les déversoirs versant librement dans un bief inférieur de même largeur;

Le cas où le barrage est noyé par un gonflement des eaux d'aval;

Les barrages perpendiculaires au courant, les barrages obliques et les barrages en chevrons;

Les barrages établis dans un bief à parois latérales divergentes;

Enfin le cas des canaux à section trapézoïdale, et, par suite, des cours d'eau naturels.

(*) Le présent travail comprend l'ensemble des documents exposés dans deux Mémoires présentés successivement à l'Académie des Sciences, et qui ont été honorés de son approbation. (*Voir les Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tomes XXV et XXVIII.)

Dans des recherches postérieures, j'ai mis en expérience les formes très-diverses de déversoirs et de digues employés, soit pour l'alimentation de certaines roues hydrauliques, soit dans les constructions fluviales. Ces dernières recherches feront l'objet d'une prochaine publication, qui comprendra en outre des résultats relatifs à l'influence que la proximité et le mouvement des roues hydrauliques peut exercer sur le débit des orifices qui les alimentent.

DONNÉES NATURELLES DE LA QUESTION DES BARRAGES DANS LES COURS D'EAU.

Ensemble du système hydraulique produit par un barrage transversal.

— La surface du bief d'amont est formée : 1° du remous produit par le barrage et qui commence à une certaine distance de celui-ci, croissante avec la charge génératrice de l'écoulement; 2° d'une portion AB inclinée vers l'aval et à très-peu près plane, partant de l'origine A du remous (*fig. 6*); 3° d'une partie à courbure convexe croissante, qui raccorde la précédente à la nappe déversée d'aval, dont le profil longitudinal extérieur CD est, d'après les observations de M. Bidone (*), une parabole analogue à celle que décrirait dans le vide une molécule isolée, mais avec un paramètre plus grand pour la même vitesse initiale.

En arrivant vers le fond du bief inférieur, la nappe liquide s'infléchit de nouveau, mais en sens inverse, et se raccorde ainsi avec le courant rectiligne d'aval.

La surface de cette nappe est, dans toute son étendue, parfaitement lisse et polie, et peut se comparer sous ce rapport à la première partie des veines issues d'un orifice complet en minces parois observée par M. Poncelet (**) pour des orifices rectangulaires de 0^m,200 de base, et, par M. Savart (***), avec de petits orifices circulaires. Mais, immédiatement après le raccordement concave dont il vient d'être parlé, ces apparences changent complètement

(*) *Mémoires de l'Académie de Turin*, tome XXVIII, année 1824.

(**) Voir le Mémoire de MM. Poncelet et Lesbros, déjà cité.

(***) *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, tome LIII. Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en minces parois.

pour faire place à un courant à surface terne, rayée par des stries nombreuses et croisées. Cet état du courant d'aval n'a lieu que dans une certaine longueur, d'autant plus grande que la charge supérieure est plus considérable; peu à peu les mouvements intérieurs dont il est le siège se calment, sa vitesse de transport diminue et son épaisseur augmente : enfin il reprend les apparences d'un cours d'eau ordinaire. En cet endroit se forme un ressaut K, qui élève la surface du courant par une pente rapide, et engendre une onde qui se propage par vagues de hauteur décroissante. La figure horizontale de ce ressaut a une liaison déterminée avec l'ordre de succession des vitesses dans le courant qui le précède; on la modifie en altérant le mouvement de la nappe sur le déversoir par l'immersion d'un corps solide dans cette nappe. Quant au relief du ressaut, il fournit sans doute la charge initiale nécessaire pour engendrer plus loin dans le canal le régime uniforme correspondant à sa pente et à son débit. Tel est l'ensemble du système hydraulique en amont et en aval du barrage établi en travers d'un cours d'eau. J'entrerai maintenant dans quelques détails importants relatifs à ses parties principales.

Caractères distinctifs des diverses espèces de nappes liquides, et phénomènes qui s'y produisent en aval de la crête du barrage.

Le passage de la nappe liquide sur l'arête vive du barrage et la présence en aval des parois du canal de fuite, donnent lieu à des phénomènes remarquables dont la considération est nécessaire pour le calcul pratique des dépenses d'eau, et se lie d'ailleurs à la plupart des questions difficiles de l'Hydraulique expérimentale.

Écoulement sous les très-petites charges, nappes adhérentes. — Supposons que la surface liquide dans le bief d'amont soit à la hauteur de la crête S du barrage (*fig. 7*), et qu'on ouvre la vanne alimentaire de manière à faire monter très-lentement cette surface : l'écoulement du déversoir commence alors par un suintement dans lequel l'eau mouille et suit la surface SAB du barrage. Cet état se prolonge jusqu'à ce que la charge supérieure soit d'environ $0^m,01$, puis la portion de la nappe qui s'appliquait sur la paroi AB s'en détache pour former un jet très-mince AC, presque droit, qui vient s'étendre, de C en B et de C en D, sur le fond du canal de fuite; la

partie supérieure *abo* de la nappe continue à adhérer au talus SA en affectant une forme représentée dans la *fig. 7*. Quand la charge atteint une valeur de $0^m,030$ environ, la portion supérieure de la nappe se détache à son tour, et il en résulte un jet parabolique.

Écoulement sous les moyennes charges. — Si, au lieu de faire monter lentement l'eau par-dessus le barrage, on lève la vanne alimentaire de manière à produire rapidement une élévation de quelques centimètres, la nappe liquide formée ainsi s'applique au barrage en prenant le profil *abcd* (*fig. 8*), et persévère dans cet état jusqu'à ce que la charge ait atteint une valeur de $0^m,135$ environ. A partir de cette charge, ou bien la nappe se renfle vers le bas pour se rapprocher du profil parabolique, ou, ce qui arrive généralement, elle se détache tout entière et brusquement du barrage. Occupons-nous de ce dernier cas, que nous appellerons des *nappes libres*, et qui réclame en premier lieu notre attention comme devant se présenter le plus fréquemment dans la pratique.

Nappes libres ou détachées du barrage. — Ainsi qu'il a été dit précédemment, la nappe liquide, en rencontrant le fond du canal de fuite, s'applique sur ce plan; la portion CB du jet, qui est lancée vers l'amont (*fig. 9*), forme contre la partie inférieure du barrage un remous CBF dont la hauteur augmente avec la vitesse d'écoulement; l'air emprisonné entre ce remous, la nappe parabolique et les parois du canal, forme une véritable, mais vaste bulle (*), occupant toute la largeur du barrage, et comparable à celles que j'ai observées, dans des recherches précédentes (**), derrière un prisme mince exposé à l'action d'un courant liquide dans la période d'émersion de ce corps. La nappe parabolique *bc* s'amincit en tombant, par suite de l'accélération de vitesse, d'où il résulte des mouvements moléculaires qui communiquent à la surface de cette nappe une sorte d'état vibratoire à faible amplitude.

(*) La pression intérieure dans cette région diffère très-peu de celle de l'atmosphère, mais d'autant plus que la vitesse de la nappe est plus considérable; elle ne descend pas au-dessous des $\frac{2.2}{1.4}$ de la pression atmosphérique pour les plus fortes charges. L'air entraîné par la surface interne de la nappe liquide produit, dans le remous inférieur, une multitude de petites bulles dont la plupart rentrent sous cette nappe.

(**) Mémoire cité page 5.

Colonne liquide soutenue par la pression de la nappe. — Le remous inférieur CBF est soutenu à une certaine hauteur croissante avec la charge supérieure par la pression de la partie inférieure de cette nappe. Cette pression paraît due à la force centrifuge de la partie concave d qui raccorde la nappe et le courant d'aval; car avec un barrage dont la surface d'aval était circulaire, et sur lequel la nappe prenait en conséquence beaucoup plus tôt une courbure concave, la hauteur du remous était plus considérable, à égalité de vitesse d'écoulement, que dans le cas d'un barrage plan. La partie supérieure F n E du remous présente une portion convexe F n qui se meut de F en n , et une seconde portion inclinée E n qui se raccorde avec la première par une série de rides de plus en plus fines jusqu'en n , où elles disparaissent. Enfin, la surface supérieure convexe F n présente, dans son profil transversal, des ondulations sensiblement égales entre elles.

La force centrifuge jouant un rôle important dans la question des veines fluides, j'ai relevé la hauteur du remous pour diverses charges et le barrage ordinaire à biseau. Je me servais à cet effet d'une tige cylindrique tt , le long de laquelle glissait à frottement doux une douille o , munie d'une vis de pression v , et armée d'une aiguille os ; les charges, ou hauteur de la surface dans le canal d'amont, au-dessus du sommet du barrage, ont été obtenues comme il sera expliqué plus loin.

Les résultats de ces observations composent le tableau suivant :

TABLEAU N° I.

| HAUTEUR du barrage. | CHARGE sur le seuil du déversoir. | HAUTEUR du remous d'aval. |
|---------------------------|--|--|
| m 0,228 | m 0,051 0,065 0,115 | m 0,078 0,107 0,204 |
| 0,345 | 0,033 0,053 0,0755 0,110 0,122 0,1375 | 0,062 0,091 0,112 0,160 0,212 0,275 |
| 0,457 | 0,045 0,073 0,101 0,121 | 0,082 0,115 0,148 0,173 |

Nappes noyées en dessous. Mouvements oscillatoires sur le talus du barrage. — La hauteur de la colonne d'eau soutenue par la pression de la nappe augmentant avec la vitesse de cette nappe, on conçoit qu'il doit y avoir, pour un barrage vertical d'élévation donnée au-dessus du radier d'aval, une charge d'eau pour laquelle le sommet de cette colonne atteint la crête S du barrage. A partir de cette charge, tout l'espace compris sous la nappe est plein d'eau, et l'on entre dans une troisième période de phénomènes hydrauliques, celle des *nappes noyées en dessous*. Pour étudier ces phénomènes, je me suis servi, comme dans mes observations sur la résistance des liquides, d'une petite boule *n* (*fig. 8*) formée de feuille d'étain mince et brillante, liée par un fil blanc très-fin à une tige cylindrique. Cette petite sphère, amenée vers le milieu du talus SA, y oscille dans un plan vertical entre deux points *a* et *b*, sur une longueur égale à peu près à la moitié de ce talus : elle dépasse quelquefois ces limites et arrive jusqu'à l'angle A ; mais alors elle en est chassée brusquement comme par la détente d'un ressort. Si l'on tire un peu le fil en arrière de manière à ne pas lui laisser prendre la disposition *pin*, il se courbe suivant *pon*, et la boule *n* se place vers le milieu du talus SA, s'y balance comme dans une position d'équilibre, puis, *périodiquement*, elle est attirée vers un point *n'*, d'où elle est renvoyée presque instantanément à sa position primitive. Enfin, lorsqu'on augmente la tension du fil en rapprochant la petite sphère *n* du point *a*, elle exécute des oscillations précipitées (trois à quatre par seconde) suivant un petit arc à peu près perpendiculaire à SA. Ces phénomènes s'accomplissent dans une zone dont l'épaisseur ne paraît pas excéder $\frac{1}{10}$ de la charge sur le seuil du déversoir, et comprise entre le plan SA et la surface inférieure de la nappe, espace qui se trouve rempli par l'eau du remous d'aval.

En résumé, on voit que les molécules liquides, dans l'étendue de cette zone, ne participent pas au mouvement de translation de la nappe, et la force qui les retient est telle, qu'une sphère creuse en verre remplie de grenailles de plomb ayant été brisée sur le talus SA, ces corps, malgré leur densité considérable, ne sont pas tombés, mais montaient et descendaient alternativement le plan incliné (*).

(*) Ces mouvements rétrogrades font comprendre comment des herbes, ayant crû dans les joints

Suite des caractères physiques des différentes nappes. — De ce qui précède, il résulte que les nappes liquides non libres doivent être classées en deux catégories très-distinctes. Dans la première, qui a lieu pour les faibles charges, la nappe adhère réellement à la surface d'aval du barrage, et en suit le contour malgré les angles et les arêtes vives qu'il présente, extension remarquable de la propriété observée par F. Savart (*) sur des veines issues d'orifices circulaires en minces parois, et lancées contre des disques plans ou des cylindres : cette propriété, se trouvant ainsi vérifiée pour de larges nappes d'eau, peut être appliquée à la disposition des roues hydrauliques et aux constructions exposées au choc des courants liquides. Dans le second cas, au contraire, ce n'est plus l'adhérence des nappes qui les empêche de couler librement, mais l'action de la force centrifuge due à la courbure inférieure de ces nappes.

Lorsque l'adhérence se produit, la surface de la nappe, parfaitement polie et brillante, présente dans le sens de sa largeur, et un peu au-dessous de sa courbure supérieure, des ondulations verticales qui descendent jusqu'au pied du barrage, et qui ressemblent aux plis d'une draperie trop large qu'on aurait jetée sur cette nappe. Dans le second cas, au contraire, la surface liquide reprend le profil parabolique et ne présente plus d'ondulations transversales. Enfin, de chacune des extrémités supérieures des nappes non adhérentes, part une sorte de pli ou de gouttière qui, en arrivant vers le

de digues en maçonnerie, s'y maintiennent perpendiculairement au talus sous un courant rapide : observation que j'avais faite depuis plusieurs années et qui s'est présentée sans doute à beaucoup d'autres personnes.

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, tome LIV, année 1833. Lorsque le choc a lieu contre un plan, la veine s'y épanouit dans tous les sens, et, s'il n'a qu'une faible étendue, elle forme autour de lui une nappe mince dont les mouvements et la forme sont très-remarquables : en faisant tomber normalement sur un disque circulaire horizontal une veine animée d'une vitesse peu considérable, l'illustre auteur de ces expériences a obtenu des nappes qui, douées d'une sorte de rétractilité, revenaient sur elles-mêmes jusqu'à toucher la tige qui soutenait le disque, ainsi que le représente la fig. 13. Or, si l'on remarque que la face d'amont des barrages déversoirs était, en définitive, un plan rencontré par un courant à faible vitesse, on reconnaîtra l'analogie qui existe entre nos nappes adhérentes (fig. 8) et celles de F. Savart : le phénomène dont il s'agit était donc dû aux forces moléculaires qui produisaient la rétractilité de ces dernières ; mais il était favorisé, en outre, par la pesanteur et par la diminution de pression qui se produisait le long du talus supérieur du barrage.

radier d'aval, laisse échapper une aigrette divergente de couleur blanchâtre, et composée d'une multitude de très-petites gouttes d'eau. Entre ces deux sillons très-étroits, le profil transversal supérieur des nappes est rectiligne.

Phénomène de la production de la bulle d'air. — Dans l'un comme dans l'autre cas des nappes non libres, on peut en produire l'isolement en plaçant dans le plan d'amont ou d'aval du barrage un corps solide, tel qu'une tige cylindrique, une règle, etc. Alors il se produit un son bas et sourd, comme celui qui a lieu lorsqu'on enflamme de la poudre à l'air libre, et la nappe se détache subitement; mais les deux cas précités présentent encore des différences bien tranchées : car, dans celui de l'adhérence, la nappe, une fois détachée, se maintient à cet état, tandis que, dans l'autre cas, le remous apportant sans cesse de l'eau dans l'espace compris sous cette nappe, et la pression de la partie inférieure du courant soutenant cette eau, elle arrive bientôt à la hauteur du sommet du barrage, et l'air introduit dans l'opération précédente s'évanouit après quelques oscillations, entraîné par le courant.

1°. *Mouvement de l'eau en amont du barrage.* — On doit à Dubuat les premières observations sur l'état d'un cours d'eau barré perpendiculairement à sa direction. M. Poncelet (*) et M. Bélanger (**) ont donné les formules générales du mouvement permanent d'où l'on peut déduire toutes les circonstances du mouvement de l'eau dans les canaux jusqu'à une certaine distance du barrage : ainsi, la question du remous, pour le cas simple qui nous occupe, doit être regardée comme résolue. C'est pourquoi nous nous attacherons particulièrement à l'étude des phénomènes importants qui s'accomplissent dans la partie du bief d'amont contiguë au barrage.

Mouvement des molécules liquides, depuis le fond du courant jusqu'au seuil du barrage, dans la région où se forme la veine contractée. — Dubuat, opérant avec un barrage de 0^m, 110 de hauteur, a observé que les molécules liquides, suivant son expression, *mouvaient de fond*, et que, arrivées à une petite distance du barrage, elles s'élevaient pour passer par-dessus sa crête.

(*) Voir le Cours de Mécanique appliquée de l'École de Metz, section VI.

(**) Notes sur le Cours d'hydraulique fait à l'École des Ponts et Chaussées.

L'importance de cette observation m'a engagé à la répéter en augmentant la hauteur du barrage. J'ai employé à cet effet une boule de verre creuse de 0^m,020 de diamètre, lestée avec des feuilles d'étain brillantes, de manière à lui faire acquérir une densité gravimétrique égale à celle de l'eau; cette petite sphère était attachée par un fil blanc très-délié à une tige mince. On enroulait le fil sur l'extrémité de la tige, et l'on plongeait ainsi la sphère dans le courant jusqu'à ce qu'elle reposât sur le fond du canal; alors on déroulait le fil en tournant la tige, puis, lorsqu'il était déroulé sur une longueur suffisante, on faisait avancer la tige de façon que, le fil n'étant plus tendu, la sphère était libre d'obéir à l'impulsion du liquide. Arrivée en un certain point d'autant plus éloigné du barrage que la charge était plus considérable, cette sphère, qui avait jusque-là glissé en ligne droite parallèlement au fond, s'ébranlait un peu à droite et à gauche, puis s'élevait lentement jusqu'à ce qu'elle eût atteint une position d'où elle se précipitait vers la crête du barrage par une route oblique. La courbe A'B'S (*fig. 6*), suivie dans ces mouvements, ressemble à une hyperbole dont une asymptote serait parallèle au fond du canal, courbe d'autant plus ouverte que la charge est plus forte et que les molécules considérées appartiennent à une portion du courant moins éloignée de la surface.

Enfin, nous signalerons une autre circonstance du mouvement ascensionnel des particules liquides vers le sommet du barrage, savoir : que, sur une faible partie de la longueur du déversoir à partir des parois latérales du canal, les particules venant du fond, au lieu de cheminer, comme les autres, dans des plans verticaux, obliquent, en s'élevant, vers les angles de l'orifice, circonstance qui provient de la tendance des filets latéraux qui viennent rencontrer le barrage, à se replier pour s'appliquer contre les parois du canal.

Remous d'amont et d'aval au pied du barrage. — La courbe décrite par les corps partant du fond laissant en dessous d'elle un espace angulaire, il était naturel de penser que cet espace était rempli par un remous tourbillon. Effectivement, en ne rendant la petite sphère libre que dans cet angle, on la voyait s'élever, en décrivant une courbe à double courbure, vers un point dont la hauteur ne dépassait guère la moitié de celle du barrage, point à partir duquel elle était renvoyée vers le fond par un mouvement giratoire à

petite vitesse (*). Le même appareil, étant introduit dans l'angle inférieur d'aval, accuse également, dans le cas des nappes non adhérentes, la présence d'un tourbillon analogue au premier, mais de sens contraire et à vitesse plus grande : de sorte que le barrage se trouve placé entre deux tourbillons. Il en résulte pour les ingénieurs l'obligation de protéger par des constructions défensives le pied des barrages permanents.

Propriétés fondamentales des tubes immergés en amont du barrage. —

Nous arrivons maintenant à une question difficile et de la plus haute importance pour l'étude de l'écoulement des fluides, considérée au point de vue le plus général.

Observation de M. Bidone. — M. Bidone ayant plongé dans le plan MN (fig. 10) d'un déversoir alimenté par un canal horizontal l'ouverture inférieure *a*, d'un tube recourbé *abc*, a remarqué qu'en quelque point de la section qu'on placât ce tube, l'eau s'y élevait au niveau de la surface dans le canal, pris à l'endroit où cette surface, selon les expressions de l'auteur, « n'ayant plus de courbure sensible, peut être regardée comme plane et » horizontale (**). » M. Bidone a en outre proposé d'appliquer cette propriété à la mesure des charges, et de calculer la dépense des déversoirs, en mettant pour *H* dans la formule ordinaire

$$Q = mLH\sqrt{2gH},$$

la hauteur *MS* du sommet *O* de la colonne liquide dans le tube recourbé, au-dessus de la crête *S* du barrage.

Le nivellement d'une surface liquide étant fort difficile lorsqu'il doit être fait avec exactitude, et cette opération pouvant même devenir impossible s'il s'élève un vent, même léger, qui fasse onduler la surface, le moyen proposé par M. Bidone est susceptible d'utilité pratique. Mais, tel qu'il a été

(*) Ce remous n'occasionne point, comme il paraîtrait naturel de le penser, le dépôt des particules terreuses; ce dépôt s'arrête, au contraire, sous la courbe *A'B'S* (fig. 6), à une faible distance du pied du barrage, et tout l'intervalle *nb* est nettoyé par le tourbillon, qui repousse en quelque sorte les particules solides et élève celles qui pénètrent dans cet intervalle jusqu'à une hauteur où elles sont entraînées vers la crête du déversoir.

(**) *Mémoires de l'Académie de Turin*, tome XXVIII, année 1824.

présenté par l'auteur, il perdrait en partie ses avantages, puisqu'il faudrait encore déterminer la hauteur de la colonne du tube au-dessus du sommet du barrage, ce qui supposerait la fixation de ce tube au milieu du courant liquide, et l'emploi d'un niveau à bulle d'air. En outre, le choc de ce courant contre l'orifice du tube, les déviations des filets qui s'y produisent, et les phénomènes de communication latérale du mouvement qui en sont la conséquence, devaient être autant de causes d'incertitude d'autant plus difficiles à apprécier dans l'expérience dont il s'agit, que l'auteur ne paraît pas avoir tenu compte des effets de la capillarité dans le tube qu'il a employé, et dont il ne donne pas le diamètre.

Observations nouvelles. — Pour faire disparaître en partie ces inconvénients, j'ai d'abord inséré la branche horizontale d'un tube recourbé dans le barrage lui-même, de façon que son orifice d'entrée correspondait à l'angle mort d'amont, où les eaux sont seulement remuées par le tourbillon mentionné précédemment. La colonne liquide s'étant élevée dans la branche verticale de ce tube, un peu plus haut que la surface liquide dans le bief alimentaire, il en résulterait évidemment qu'un tube droit TT' (*fig. 9*), plongé en amont du barrage, et ouvert aux deux extrémités, devait fournir les mêmes indications. Dès lors, la question d'usage était débarrassée de tous les obstacles matériels inhérents au procédé de M. Bidone, puisqu'il suffisait d'appliquer verticalement contre la paroi d'amont du déversoir ce tube, et qu'on pouvait même le laisser s'appuyer contre le fond du canal, pourvu qu'il y eût à sa partie inférieure une échancrure quelconque par où l'eau pût s'introduire : en outre, la colonne d'eau se trouvant appliquée contre la crête du déversoir, on pouvait immédiatement mesurer sa hauteur au-dessus de cette crête, et l'on était dispensé de toute installation.

Cette nouvelle propriété pouvant fournir un moyen aussi simple que facile de mesurer les charges du déversoir, si toutefois la colonne du tube indiquait ces charges, soit directement, soit par une relation simple, et sa connaissance devant, dans tous les cas, augmenter les notions importantes de l'Hydraulique physique, j'en ai fait une étude attentive qui m'a conduit aux résultats suivants :

1°. Dans tous les points de la largeur du barrage, la colonne liquide s'élève à la même hauteur, excepté lorsque le tube n'est plus qu'à quelques

millimètres de la paroi verticale du canal ; il s'y produit alors une dépression.

2°. Si l'on fait mouvoir le tube droit de bas en haut, on n'observe point de variation dans la hauteur de la colonne qu'il contient ; mais lorsque son extrémité inférieure n'est plus qu'à quelques centimètres de la crête S du barrage, cette colonne exécute des oscillations dont l'amplitude augmente à mesure que le tube s'élève : enfin, à l'instant où son extrémité inférieure dépasse la crête du barrage, il s'y produit une dépression considérable.

3°. Un tube droit, fermé à la lampe à son extrémité inférieure, percé latéralement d'un très-petit trou et plongé contre la face d'amont du barrage, fournit les mêmes indications que le précédent, *de quelque côté que l'on tourne le petit orifice* ; mais les oscillations sont plus lentes.

4°. Un tube recourbé *abc* (*fig. 11*), appliqué contre le plan d'amont du barrage, donne également une colonne de même hauteur, déduction faite, s'il y a lieu, de l'influence différente de la capillarité.

5°. La colonne liquide soulevée dans le tube droit précité, s'élève sensiblement (*) à la même hauteur absolue, à quelque distance du déversoir que l'on plonge ce tube, dans la région comprise entre la face d'amont du barrage et l'origine de la nappe. En ce point, il se manifeste dans la même colonne une légère dépression provenant du mouvement des filets fluides en dessous de la base horizontale du tube.

6°. Quelle est, maintenant, la hauteur que les tubes indiquent ? Faut-il conclure des paroles de M. Bidone que c'est, en général, celle du point où la surface des eaux d'amont est horizontale, et donneraient-ils la chute totale de la surface jusqu'au barrage ? Dans le cas contraire, quelle est la différence entre cette chute et celle indiquée par le tube ?

Comparaison des hauteurs indiquées par les tubes avec celles de la surface horizontale dans le réservoir d'amont. — Pour m'éclairer à cet égard, j'ai placé sur le fond du canal un tuyau en bois à section carrée de 0^m,040 de côté intérieur, ayant une longueur de 42 mètres, aboutissant, d'une part, à la partie du grand réservoir d'amont où l'eau était sans mouvement appré-

(*) On conçoit que les oscillations de la colonne hydrostatique, quelque peu étendues qu'elles fussent, ne permettaient pas d'apprécier rigoureusement une variation de hauteur de quelques dixièmes de millimètre.

ciable, d'autre part à un barrage vertical de 0^m,228 de hauteur, qui en fermait l'extrémité. En ce point, j'ai fait pénétrer dans ce tuyau un tube droit vertical, où l'eau se relevait nécessairement à la hauteur du niveau dans le réservoir; un autre tube droit, mais libre, et de même diamètre, était placé contre le premier. En retranchant des hauteurs de la colonne liquide dans ces tubes celle du ménisque capillaire, j'ai obtenu les résultats suivants :

TABLEAU N° II.

| HAUTEUR, au-dessus du sommet du barrage, | | DIFFÉRENCES. |
|---|-----------------------------------|------------------------|
| du niveau dans le réservoir supérieur. | de la colonne dans le tube libre. | |
| ^m 0,1220 | ^m 0,1205 | ^m 0,0015 |
| 0,1340 | 0,1300 | 0,0040 |
| 0,1630 | 0,1610 | 0 0080 |
| 0,2350 | 0,2215 | 0 0175 |

Les différences inscrites dans ce tableau, qui croissent avec la vitesse dans le canal, expriment la chute totale de la surface depuis le réservoir jusqu'au point où la hauteur de cette surface est celle indiquée par le tube libre. Mais quel est définitivement ce point? comment doit-on le caractériser? C'est dans l'étude circonstanciée et rigoureuse du profil et des transformations successives de la surface liquide, que j'ai cherché, en définitive, la solution de cette question fondamentale.

Étude du profil et des dépressions de la surface liquide en amont du barrage. — A cet effet, j'ai fait construire un appareil composé : 1° d'une auge en chêne, qu'on établissait, horizontalement et parallèlement à l'axe longitudinal du canal, sur quatre traverses en chêne de fort équarrissage ; le fond *abcd* (fig. 12) de cette auge était rempli de mercure ; 2° d'une ferrure *efghi*, posée sur les bords de l'auge par l'intermédiaire de trois vis calantes *v v' v''* ; la portion supérieure *fg* de cette ferrure porte, vers son centre, une pointe *k* ; la branche verticale *ef* est graduée et disposée en coulisse pour laisser glisser verticalement et maintenir à une hauteur quelconque, au moyen d'une vis de pression *l*, un curseur muni d'un écrou *m*, dans lequel tourne une vis micrométrique *Vs*, armée inférieurement d'une longue pointe *s*, et dont le pas est

de $0^m,001$; la branche postérieure gh de la même ferrure se retourne horizontalement pour porter un contre-poids p . La pointe k affleurerait constamment la surface du mercure, et la branche ef était en même temps disposée verticalement au moyen des vis calantes $v\ v'\ v''$ par l'observateur, guidé dans cette opération soit par un fil à plomb, soit par un niveau à bulle d'air posé sur fg dans deux sens à peu près perpendiculaires entre eux; enfin la pointe s de la vis micrométrique était amenée, pour chaque station de cet équipage mobile, au contact de la surface de la nappe, contact facile à établir à cause des rides qu'il détermine. J'ai pu ainsi obtenir, à moins d'un dixième de millimètre, les différences de niveau d'un nombre suffisant de points de la surface liquide sur une longueur d'environ $2^m,80$ à partir du seuil du déversoir. D'après les cotes résultant de ce nivellement, j'ai construit graphiquement les profils des nappes, en prenant les abscisses horizontales, ou distances au seuil, à l'échelle de $\frac{1}{4}$, et les ordonnées à celle de cinq fois leur véritable grandeur; de sorte que les courbes tracées représentaient les différentes inflexions des nappes avec un grossissement de vingt fois. Avant de rapporter les résultats de cette étude, nous inscrivons dans le tableau suivant ceux du nivellement: toutes les dimensions y sont exprimées en millimètres, et les charges indiquées sont celles qui étaient fournies par un tube droit plongé contre la face d'amont du barrage.

La première colonne de ce tableau indique les numéros des profils, dont les cotes sont rangées horizontalement à la suite sur deux lignes, la première contenant la distance de chaque point au seuil du déversoir, et la seconde les hauteurs respectives de ces points au-dessus du même seuil. Les charges correspondantes à chaque profil et données par le tube sont dans la dernière colonne, marquée (T). Nous observerons enfin que le profil n° 5 a été obtenu, non pas avec l'appareil à mercure, mais avec une coulisse en bois terminée par une pointe et glissant le long d'une grande règle en sapin; aussi ce profil est-il moins exact que les précédents, et nous avons été obligé de le rectifier par la construction graphique.

TABLEAU N° III.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------------|--------------|
| 1 | 0 | 113 | 213 | 313 | 413 | 513 | 813 | 1313 | " | " | 2313 | " | 128 | Nappe libre. | |
| | 105 | 120 | 123,8 | 125,7 | 126,6 | 126,9 | 127,3 | 127,7 | " | " | 127,9 | " | | | |
| 2 | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 800 | 1000 | 1300 | 1600 | 2100 | 2830 | 195,2 | Nappe libre. |
| | 162,8 | 178,4 | 184,5 | 187 | 188,4 | 189,1 | 189,6 | 190,2 | 190,6 | 190,9 | 191,1 | 191,9 | 192,7 | | |
| 3 | 0 | 113 | 213 | 313 | 413 | 613 | 813 | 1313 | 1813 | " | " | 2813 | 169 | Nappe noyée en dessous. | |
| | 136 | 154,3 | 160 | 163,3 | 164,1 | 166,1 | 166,3 | 166,5 | 166,7 | " | " | 166,3 | | | |
| 4 | 0 | 20 | 70 | 220 | 420 | 620 | 820 | 1320 | 1920 | " | " | 2800 | 235,2 | Nappe noyée en dessous. | |
| | 194 | 197,2 | 208,2 | 221,1 | 227,6 | 230,2 | 230,6 | 231,1 | 231,4 | " | " | 231,2 | | | |
| 5 | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 700 | 900 | 1100 | 1335 | 1823 | " | 266 | Nappe noyée en dessous. | |
| | 222 | 239,7 | 249,2 | 255 | 258,4 | 259,8 | 261,1 | 262 | 262,5 | 262,8 | 263,3 | " | (T) | | |

En construisant, comme nous l'avons indiqué plus haut, ces profils, et particulièrement ceux qui se rapportent aux nappes libres, on reconnaîtra l'existence des trois parties principales précédemment signalées, savoir, à partir du barrage : 1° une courbure convexe très-prononcée; 2° une portion sensiblement rectiligne; 3° le commencement du remous de Dubuat. L'origine d'amont de la deuxième portion est évidemment celle de la nappe du déversoir; car il s'opère en cet endroit un changement de pente remarquable, constaté dans le tableau suivant :

TABLEAU N° IV.

| NUMÉROS des profils. | CHARGE H sur le seuil du déversoir. | PENTE de la partie sensiblement rectiligne. | PENTE dans le remous immé- diatement en amont de l'origine de la nappe. |
|----------------------------|---|--|---|
| 1 | 128 | $\frac{1}{1350}$ | $+\frac{1}{1000}$ |
| 2 | 195,2 | $\frac{1}{812}$ | $+\frac{1}{812}$ |
| 3 | 169 | $\frac{1}{1000}$ | $-\frac{1}{1000}$ (*) |
| 4 | 235,2 | $\frac{1}{1171}$ | $-\frac{1}{1171}$ (*) |
| 5 | 266 | $\frac{1}{1000}$ | " |

(*) Ces deux résultats proviennent sans doute de ce que le profil du remous tournait sa convexité vers le fond du canal dans le cas des nappes non libres.

On se rappellera que notre canal était incliné à $\frac{1}{1000}$. M. Bidone, opérant dans un canal horizontal, a relevé, en les traçant sur les parois, les profils de

six nappes liquides; deux de ces profils, correspondant à des charges de $0^m,0744$ et $0^m,0947$, se prolongent un peu au delà du point que nous regardons comme l'origine des nappes: il en résulterait qu'en cet endroit la surface liquide était sensiblement horizontale, tandis qu'elle prenait, immédiatement en aval, une pente égale, respectivement, à $\frac{1}{72}$ et $\frac{1}{60}$.

Remarquons maintenant que, dans nos observations, la surface du remous était en contre-pente par rapport au fond du canal; le profil n° 2 présente seul une exception qui peut provenir, soit d'une très-légère erreur dans la cote du nivellement du dernier point, soit de ce que la pente du fond du canal se trouvait un peu modifiée par le gonflement des bois ou un glissement accidentel des coins qui le supportent en cet endroit. On sait d'ailleurs que Dubuat, dans un canal incliné à $\frac{1}{458}$ et pour une charge de $0^m,086$ sur le seuil du déversoir, a trouvé que la surface liquide s'élevait, par rapport au fond, jusqu'à une distance de $1^m,624$ du barrage. Nous devons donc admettre que, dans les canaux inclinés, les filets supérieurs vont en divergeant, par rapport aux filets inférieurs, jusqu'à l'origine de la nappe.

Cela posé, considérant, dans la région comprise entre la section qui passe par cette origine et le barrage, les mouvements des molécules qui viennent du fond du canal, je rappellerai que ces particules commencent, à une assez grande distance du déversoir, à s'élever vers la région supérieure, mais très-lentement, en décrivant une courbe en quelque sorte asymptotique au fond du canal, puis que, arrivées à proximité du barrage, leur mouvement s'accélère rapidement, la courbure de leur trajectoire augmente, à peu près comme celle d'une hyperbole dans le voisinage de son sommet, et que bientôt elles se précipitent vers le seuil du déversoir. La nature de la première partie de cette trajectoire et la nécessité de l'observer en regardant obliquement de haut en bas, rendent bien difficile, pour ne pas dire impossible, la détermination exacte du point où commence le mouvement ascensionnel des particules liquides; aussi n'oserais-je pas affirmer que ce point correspond verticalement à l'origine de la nappe du déversoir, quoique cette circonstance m'ait paru avoir lieu. D'un autre côté, en comparant la courbe dont il s'agit, dans la partie où elle peut être facilement observée, au profil supérieur de la nappe, on remarque, entre ces deux courbes, jusqu'à une faible distance du barrage, une analogie telle, qu'il semble que la trajectoire inférieure

reproduise la supérieure renversée; et la même analogie a lieu, d'une manière plus frappante encore, entre les accélérations de vitesse sur ces deux courbes. Il en résulte, non pas la certitude, mais une très-grande probabilité qu'elles ont leur origine dans la même section du canal: c'est pourquoi nous nommerons *section initiale* de la veine liquide, celle où commence la dépression de la surface supérieure du courant; et nous croyons pouvoir admettre qu'à partir de cette section, les routes suivies par les particules fluides commencent à converger entre elles, après avoir été parallèles ou divergentes, c'est-à-dire la regarder comme *le lieu du parallélisme momentané des filets (*) liquides*.

Comparons maintenant les charges indiquées par le tube hydrostatique aux résultats du nivellement des nappes.

TABLEAU N° V.

| NUMÉROS des profils. | HAUTEUR de l'origine de la nappe au-dessus du seuil du déversoir. | CHARGE sur le seuil du déversoir indiquée par le tube. | DIFFÉRENCE entre ces hauteurs. | DISTANCE horizontale de la section initiale au seuil du déversoir. |
|----------------------------|--|---|--------------------------------------|---|
| 1 | 127,7 | 128 | 0,3 | m 1,313 |
| 3 | 166,7 | 168,7 | 2,0 | 1,813 |
| 2 | 191,9 | 195,2 | 3,3 | 2,100 |
| 4 | 231,4 | 235,2 | 3,8 | 1,920 |

On voit que le sommet de la colonne liquide s'élève dans le tube un peu au-dessus de celui de la section initiale de la veine; ce résultat, qui ne pourrait avoir lieu s'il s'agissait d'un orifice alimenté immédiatement par un grand réservoir à surface libre et horizontale, peut être attribué ici à la quantité de mouvement déjà acquise par les particules liquides lorsqu'elles atteignent la section initiale des nappes. Dans ces expériences, en effet, la hauteur du barrage était de 0^m,328 seulement, et si l'on calcule la dépense de l'orifice

(*) En employant cette expression si usitée de *filets*, nous ne lui attribuons d'autre signification que celle de la direction du mouvement de translation des particules fluides parties d'un même point. Nous pensons même qu'il est difficile de concevoir une masse fluide en mouvement, comme composée de particules rangées ainsi par files et soumises à des forces intérieures, sans que l'inégalité des vitesses de translation de deux files voisines, détruisant l'équilibre de ces forces, n'engendre des mouvements oscillatoires continuels de part et d'autre de la route moyenne que l'on appelle filet.

au moyen de la formule qui sera donnée plus loin, on verra que la hauteur due à la vitesse moyenne dans la section précitée était plus grande que l'excès de hauteur qui nous occupe, mais d'une faible quantité croissante avec la même vitesse pour un état déterminé de la nappe. Cette différence constitue une véritable perte de chute due à la résistance des parois du canal, ou à ce que l'on est convenu d'appeler, mais improprement, le *frottement* du liquide : aussi, quoique l'excès δ de la charge H fournie par le tube hydrostatique sur la hauteur du sommet de la nappe, au-dessus du seuil du déversoir, augmente avec cette charge, l'augmentation se ralentit à mesure que H devient plus grande, de sorte que l'excès proportionnel $\frac{\delta}{H}$ ne paraît pas devoir s'élever au delà de $\frac{1}{60}$ pour les plus grandes charges employées dans la pratique.

Quant à la distance de la section initiale au barrage, les résultats précédents montrent que, pour un même état de la nappe, elle augmente avec la charge, et qu'à égalité de valeur de celle-ci, elle est plus grande pour les nappes libres que pour celles qui sont noyées en dessous.

Observation générale. — Avant de passer à un autre sujet, nous ferons remarquer que les résultats précédemment énoncés de nos observations relatives aux tubes hydrostatiques ne permettent pas de douter qu'ils soient dus aux pressions intérieures du milieu fluide, qui ont lieu dans la région comprise entre le barrage et la section initiale de la veine; les mouvements qui peuvent se produire contre l'entrée des tubes ne sauraient être regardés que comme une influence perturbatrice susceptible de produire des oscillations dans la colonne liquide, ou même seulement de modifier (*) la pério-

(*) En considérant que les oscillations dont il s'agit se produisent dans un tube, fermé à la partie inférieure, et percé latéralement d'un très-petit orifice, de quelque côté que l'on tourne celui-ci, on est porté à leur attribuer une autre cause que les mouvements déviatoires des particules voisines. Comme, d'ailleurs, la surface liquide, dans le réservoir alimentaire d'amont, était calme, horizontale et entretenue à un niveau constant, on se trouve ainsi conduit à l'idée d'une certaine périodicité dans les pressions et les vitesses d'écoulement, due aux phénomènes qui accompagnent la formation de la veine. Cette question a été soulevée pour la première fois par F. Savart, à l'occasion de ses belles expériences sur la constitution des veines lancées par un orifice circulaire : les renflements annulaires qu'il a observés le long de la première partie du jet liquide jusqu'à une faible distance de l'orifice, et le son qui résulte du choc de ces renflements contre une membrane tendue, ont conduit ce physicien à admettre la périodicité des vitesses, d'autant plus que ces renflements se manifestent également dans

dicité de ces oscillations, qui sont d'ailleurs à peine sensibles sous les petites charges, croissent avec la vitesse du courant, mais restent toujours faibles quand l'air ambiant n'est pas fortement agité par un vent d'amont ou d'aval.

Examen du rapport entre les charges indiquées par le tube hydrostatique et les épaisseurs des nappes mesurées dans le plan vertical de la crête du barrage.

Nous désignerons les charges par H et les épaisseurs dont il s'agit par e . Dans les expériences exécutées en 1846, afin d'arriver promptement à une approximation pratique, j'avais fait quelques observations sur deux barrages de hauteurs et de largeurs différentes, observations dont les résultats, peu différents entre eux, m'avaient donné, en moyenne, $\frac{H}{e} = 1,20$ pour le cas des nappes libres. J'avais reconnu en outre que, dans les autres cas, ce rapport variait avec la charge trop notablement pour qu'il fût permis d'adopter une valeur moyenne. Mais les observations relatives aux nappes libres ne s'étendant que jusqu'à la charge de $0^m,121$, j'ai cru devoir profiter des nouvelles facilités qui m'étaient données en 1847 pour reprendre et compléter ces observations. Après avoir opéré avec trois barrages de $0^m,900$ de largeur et de hauteurs différentes, comme je ne pouvais obtenir des nappes libres sous de très-fortes charges à cause du remous formé au pied du barrage, j'ai établi, dans la dernière partie du canal d'expériences et suivant le même

le vide et lorsque la paroi de l'orifice est soutenue par un corps solide, ce qui ne permet pas de les attribuer, soit à la résistance de l'air, soit aux vibrations excitées par le frottement du courant contre les bords de l'orifice.

Nous ajouterons que nous avons souvent observé dans la hauteur du sommet des jets d'eau des variations sensibles paraissant assujetties à une loi de périodicité. De plus, en nous plaçant assez loin d'une grande digue pour éviter le trouble produit dans la perception des sons par le fracas de la chute, nous avons toujours observé dans leur intensité une série d'accroissements et d'affaiblissements successifs très-distincts. Cette observation a été répétée à différentes époques de l'année, et lorsque l'atmosphère était assez calme pour ne pas agiter les feuilles ou les plus petites branches des arbres; mais elle ne saurait être prise pour base, non plus que celle qui concerne les jets d'eau, avant d'avoir été reproduite dans des expériences spéciales où l'on aurait employé toutes les précautions nécessaires pour établir une alimentation parfaitement uniforme des orifices, et nous ne les citons que pour appeler l'attention sur un sujet dont l'importance est facile à reconnaître.

axe, un canal intérieur de 0^m,700 de largeur et de 7 mètres de long, à l'extrémité duquel j'ai placé un barrage de 0^m,252 de hauteur, qui versait l'eau librement dans l'atmosphère. Les résultats de ces diverses expériences ont été représentés graphiquement avec le plus grand soin et au moyen d'une équerre et d'une règle en cuivre graduées, avec verniers. La branche de l'équerre évidée qui se dispose perpendiculairement à la règle est munie d'un curseur portant une petite vis terminée par une pointe très-fine; en tournant un peu la vis, on marquait sur le papier, bien tendu, un point dont l'abscisse était H et l'ordonnée $\frac{H}{e}$. Les courbes déterminées par ces points pour un même barrage ressemblent à des hyperboles équilatères dont une asymptote serait parallèle à l'axe des abscisses, résultat analogue à celui qui a été obtenu par MM. Poncelet et Lesbros pour un déversoir avec contraction latérale complète. Ces courbes étant tracées, je m'en suis servi pour composer le tableau suivant :

TABEAU N° VI.

| CHARGE sur le seuil H. | VALEURS | | | |
|------------------------------|--|------------|------------|------------|
| | Du rapport $\frac{H}{e}$ pour les nappes libres et des barrages dont les hauteurs sont : | | | |
| | 252 (1) | 325 (2) | 420 (3) | 518 (4) |
| 25 | 1,367 | " | " | 1,310 |
| 30 | 1,339 | " | " | 1,285 |
| 40 | 1,288 | " | 1,320 | 1,250 |
| 50 | 1,260 | " | 1,285 | 1,228 |
| 60 | 1,234 | 1,243 | 1,249 | 1,214 |
| 70 | 1,223 | 1,238 | 1,231 | 1,205 |
| 80 | 1,216 | 1,232 | 1,223 | 1,200 |
| 90 | 1,212 | 1,228 | 1,218 | 1,190 |
| 100 | 1,210 | 1,225 | 1,217 | 1,189 |
| 120 | 1,206 | 1,221 | 1,212 | 1,197 |
| 140 | 1,202 | 1,216 | 1,206 | " |
| 160 | 1,199 | " | 1,201 | " |
| 180 | 1,196 | " | 1,195 | " |
| 200 | 1,193 | " | 1,191 | " |
| 250 | 1,186 | " | " | " |
| 300 | 1,184 | " | " | " |
| 350 | 1,182 | " | " | " |
| 400 | 1,180 | " | " | " |

On voit que le rapport dont il s'agit diminue toujours quand la charge augmente ; en outre, la comparaison des valeurs de $\frac{H}{e}$, comprises dans les colonnes (2), (3) et (4), et correspondantes à une même charge, montre que ce rapport varie en sens inverse de la hauteur du barrage pour une même largeur. Cela posé, la comparaison de la colonne (1) avec les autres prouve que $\frac{H}{e}$ n'est pas tout à fait indépendant de la largeur du barrage : ainsi, à la rigueur, ce rapport varie avec tous les éléments de l'écoulement des nappes ; mais, au point de vue pratique, et en exceptant le cas des très-petites charges, ces variations ont bien peu d'importance. En effet, la charge H variant de 0^m,100 à 0^m,400, le rapport $\frac{H}{e}$ a diminué de moins de $\frac{1}{10}$: quant à l'influence de la hauteur du barrage, qui tient encore probablement aux mouvements des particules liquides venant du fond du canal, déjà pour la charge de 0^m,12, cette hauteur augmentant de 0^m,325 à 0^m,518, le rapport en question n'a diminué que de $\frac{1}{61}$ environ. Enfin, dans quelques expériences de M. Castel, relatives à des charges comprises entre 0^m,03 et 0^m,08 inclusivement et pour une même hauteur 0^m,17 du barrage, la largeur de celui-ci ayant varié de 1 à 2,05 (*), la valeur moyenne de $\frac{H}{e}$ n'a augmenté que de $\frac{1}{197}$. Passant maintenant au cas des nappes noyées en dessous, nous inscrivons dans le tableau suivant les résultats obtenus dans le canal ordinaire de 0^m,900 de largeur :

(*) *Mémoires de l'Académie de Toulouse*, tome IV, année 1837.

TABLEAU N° VII.

| CHARGE sur le seuil H. | VALEURS | | |
|------------------------------|--|-------|-------|
| | De $\frac{H}{e}$ pour les nappes noyées en dessous et des barrages dont les hauteurs sont : | | |
| | 325 | 335 | 420 |
| 130 | " | 1,283 | " |
| 140 | " | 1,275 | 1,291 |
| 150 | 1,255 | 1,266 | 1,281 |
| 160 | 1,250 | 1,258 | 1,271 |
| 180 | 1,236 | 1,245 | 1,254 |
| 200 | 1,225 | 1,232 | 1,241 |
| 220 | 1,216 | 1,223 | " |
| 240 | 1,208 | 1,216 | " |
| 260 | 1,202 | 1,208 | " |
| 280 | 1,198 | 1,203 | " |
| 300 | " | 1,198 | " |

L'influence de la hauteur du barrage est aussi faible que pour le cas des nappes libres, mais se manifeste ici en sens inverse. Quant à celle de la charge H, elle s'exerce dans le même sens, et l'on voit que, toutes choses étant égales d'ailleurs, la chute à la surface est plus petite pour les nappes libres que pour les autres jusqu'aux charges approchant de 0^m,300.

La contradiction qui paraît exister entre les deux résultats inverses relatifs à l'influence de la hauteur du barrage sur le rapport $\frac{H}{e}$, disparaît lorsque l'on observe que l'action du mouvement ascensionnel des particules se précipitant du fond du canal, qui existe aussi bien dans le second cas que dans celui des nappes libres, est accompagnée, quand les nappes sont noyées en dessous, d'une autre influence, celle de la pression exercée également de bas en haut sur la nappe par le remous d'aval, pression qui doit être d'autant plus grande que le sommet du barrage, tout étant égal d'ailleurs, s'abaisse davantage au-dessous du niveau qu'atteindraient naturellement les eaux de ce remous sous la pression de la partie inférieure de la nappe.

CALCUL DU DÉBIT DES BARRAGES DÉVERSOIRS.

Des formules proposées jusqu'ici pour le calcul des dépenses d'eau faites par les déversoirs.

Dubuat, considérant la section liquide d'un déversoir comme un orifice rectangulaire complet, composé de tranches horizontales infiniment minces, à chacune desquelles il appliquait la formule de Torricelli, avait obtenu l'expression suivante de la dépense théorique des déversoirs (*):

$$Q = \frac{2}{3} L \sqrt{2g} (H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}),$$

dans laquelle nous représentons par H la hauteur du niveau horizontal dans le réservoir au-dessus du seuil, et par h celle du même niveau au-dessus du sommet de cet orifice, c'est-à-dire la dépression totale de la nappe. Ayant déduit de plusieurs expériences sur des déversoirs avec contraction latérale, que la formule précédente en représentait assez bien les résultats lorsqu'on y supposait $h = \frac{1}{2} H$, Dubuat en conclut

$$Q = 0,431 LH \sqrt{2gH}.$$

Le même auteur propose ensuite, au sujet des déversoirs ou barrages alimentés par un canal de même largeur L (**), de calculer la dépense....
« en supposant la section du déversoir égale à sa largeur multipliée par la » hauteur entière de la charge d'eau..., » ce qui conduit à la formule théorique très-simple

$$(1) \quad Q = LH \sqrt{2gH},$$

qui a été généralement employée jusqu'à présent dans tous les cas. Malheureusement, la détermination des coefficients à appliquer à cette formule en

(*) *Principes d'Hydraulique*, partie I, n° 142.

(**) Même ouvrage, partie II, n° 412.

complique singulièrement l'usage. En effet, si l'on considère d'abord le cas où l'orifice est alimenté par un réservoir à grande section, on voit que la disposition de l'un quelconque des trois côtés de cet orifice, par rapport à la paroi correspondante du réservoir, doit, jusqu'à une certaine limite d'éloignement, influencer sur la dépense, en modifiant la courbure des filets liquides dont la formule ne tient pas compte ; l'influence de la charge n'y est qu'imparfaitement représentée, comme l'expérience l'a appris, et on le conçoit d'ailleurs à priori en remarquant : 1° que la vitesse d'écoulement doit dépendre surtout de la chute à la surface de la nappe, et que, pour une même charge, cette chute varie ; 2° que les particules liquides tombent du réservoir dans l'espèce de gouttière formée par la nappe en amont de l'orifice, dans deux sens, l'un longitudinal, l'autre transversal au courant central.

Lorsque le déversoir est alimenté par un canal de même largeur, les phénomènes se simplifient, et la difficulté des contractions latérales disparaît ; mais il s'en introduit une nouvelle, l'influence des vitesses acquises par les particules fluides dans le bief d'amont. Le premier auteur qui se soit inquiété de cette influence, Dubuat, prescrit d'ajouter... « à la charge d'eau apparente... » sur le seuil de l'orifice... « la hauteur due à la vitesse de l'eau » immédiatement au-dessus du déversoir.... » Il entendait sans doute par cette dernière expression l'endroit où il mesurait la charge.

M. Weisbach (*) critique cette règle ; et, décomposant l'orifice LH en tranches infiniment minces à chacune desquelles il l'applique, mais en employant la vitesse moyenne U dans la section correspondante, il obtient la formule

$$(2) \quad Q = \frac{2}{3} L \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{U^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{U^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Enfin, suivant M. Bélanger (**), en désignant par v la vitesse des particules liquides à la surface du courant immédiatement en amont de l'endroit où l'on mesure H, endroit qu'aucun auteur n'a d'ailleurs exactement précisé,

(*) *Allgemeine Maschinen-Encyclopædie*, tome I, article AUSFLUSS (Leipzig, 1841).

(**) *Notes sur le Cours d'Hydraulique fait à l'École des Ponts et Chaussées*, année 1845-1846.

on pourrait calculer approximativement la dépense d'un barrage par la formule

$$(3) \quad Q = \left(H + \frac{v^2}{2g} \right) \sqrt{2g \left(H + \frac{v^2}{2g} \right)}$$

affectée d'un coefficient obtenu par expérience.

Ces formules présentent toutes le défaut que nous reprochions tout à l'heure à la formule (1), dont elles dérivent, celui d'être complètement indépendantes de la chute à la surface de la nappe; de telle sorte que, pour une même valeur de H , un déversoir débiterait le même volume liquide pour les trois états des nappes que nous avons signalés, avec un barrage incliné ou vertical, un seuil à vive arête ou arrondi, épais ou mince, etc.

L'expérience et le raisonnement s'opposent à de pareilles conséquences, et l'on doit prévoir que les coefficients de ces diverses formules varieront avec toutes les circonstances que nous indiquons; il pourra même arriver que, dans certains cas, ces coefficients augmentent avec H , tandis que, dans d'autres, ils varieront en sens contraire.

Relativement à la manière de tenir compte des vitesses initiales des particules fluides, la formule (3) ne contient qu'une vitesse à la surface, vitesse qui n'est pas liée aux autres par un rapport simple et constant; en la faisant entrer dans le premier facteur, on s'écarte d'ailleurs, sans motif suffisant, de l'idée fondamentale de Dubuat, qui consiste à considérer le déversoir comme un orifice rectangulaire, dont la hauteur est H . Quant à la formule, plus compliquée, de M. Weisbach, elle présente cette imperfection, qu'on y fait jouer le même rôle à toutes les vitesses initiales, tandis que l'examen des mouvements intérieurs nous apprend qu'une partie de ces vitesses, celles des portions inférieures du canal, en aidant les particules liquides à remonter vers le sommet du barrage contre l'action de la pesanteur, contribuent à produire les phénomènes de la contraction sur le seuil de l'orifice.

Enfin, à ces inconvénients, à ces imperfections des formules précitées, se joint, dans l'application, la difficulté du choix du point de départ (*) de la

(*) Les ingénieurs qui ont appliqué la méthode des barrages choisissaient très-probablement, pour mesurer les charges, un point de la portion de la nappe où sa courbure commence à être nettement

charge H , et celle des nivellements, qui devient une impossibilité quand l'atmosphère agitée, même par un vent léger, fait courir périodiquement, le long de la surface liquide, des ondulations longues et peu saillantes.

Nouvelle formule. — Nous désignerons par

L la largeur du déversoir;

S la hauteur de la crête du barrage au-dessus du fond du bief d'amont;

Q la dépense ou le débit du déversoir dans chaque seconde sexagésimale;

k le rapport $\frac{e}{H}$, les lettres H et e continuant à représenter les mêmes quantités que dans l'article précédent.

On sait que la formule théorique de l'écoulement des liquides par un orifice dont l'aire est A , et qui s'alimente par un réservoir dont la section a pour aire O , est

$$(a) \quad Q = A \sqrt{2g \frac{h}{1 - \frac{A^2}{O^2}}},$$

si l'on désigne par h la charge ou *hauteur effective de pression statique* sur l'orifice. Cette formule, basée sur le principe des forces vives, serait exacte dans le cas où les vitesses des particules fluides seraient égales et parallèles dans la section O , et où, dans l'orifice, ces particules n'auraient que des vitesses perpendiculaires à son plan et égales entre elles, en admettant toutefois qu'entre les sections O et A la résistance des parois n'absorbât qu'une quantité de travail négligeable. Quoique l'hypothèse de l'égalité des vitesses ne soit jamais conforme à la réalité, la formule (a) peut donner des résultats suffisamment approchés pour tous les besoins de la pratique, lorsque les vitesses sont parallèles respectivement et diffèrent peu entre elles dans chacune des sections dont il s'agit. Or cette condition est réalisée dans la section initiale de la veine, ou dans celle qui la précède immédiatement, et que nous regarderons comme la section alimentaire O . Il nous reste donc à

accusée, et ont, par suite, été conduits à employer dans leurs calculs des charges un peu trop faibles. En admettant qu'on eût pris pour point de départ l'origine même de cette courbure, il faudrait, d'après l'étude des profils, augmenter les charges ainsi obtenues dans le rapport, sensiblement constant, de 983 à 1000.

assimiler l'écoulement en déversoir à celui d'un orifice dans la section duquel les vitesses seraient parallèles, et à trouver l'aire A de cet orifice, ainsi que la hauteur h de pression statique correspondante.

Conformément à l'opinion de Dubuat, adoptée généralement par les ingénieurs, nous considérerons le déversoir comme un orifice rectangulaire dont la hauteur serait H , et, par conséquent, nous aurons $A = LH$, puisque cet orifice n'est autre chose que la portion DA de la section initiale DB (*fig. 14*), dans toute l'étendue de laquelle les vitesses sont parallèles. Pour déterminer la hauteur h , nous remarquerons d'abord que la région liquide comprise entre cette section et le barrage peut être partagée, par un plan horizontal SA , en deux parties, dont les mouvements sont très-différents, au moins quant à leur sens, et dans lesquelles les pressions, le poids des molécules et leur inertie jouent des rôles inverses.

Dans la portion inférieure N , en effet, les particules fluides remontent vers le plan horizontal précité, contrairement à l'action de la pesanteur, en vertu de la vitesse dont elles sont animées lorsqu'elles approchent du barrage, et de la pression qui produit l'ascension de la colonne hydrostatique des tubes; dans la portion M , au contraire, la pesanteur agit uniquement comme force motrice pour augmenter la force vive initiale des particules. En un mot, les forces de la veine travaillent utilement dans la partie supérieure, et, dans l'autre, elles engendrent la contraction, les obstacles à l'écoulement. L'effet de ces derniers phénomènes est évidemment de soutenir jusqu'en C , au-dessus du barrage, la masse liquide, et de *noyer* l'orifice DA , d'où elle tomberait librement suivant un jet parabolique, si l'on pouvait supprimer la portion inférieure SAB de la veine, tout en conservant aux particules fluides, dans la section DA , leur mouvement effectif. Ainsi, dans le cas des déversoirs sans contraction latérale (*), si l'on assimile l'écoulement à celui d'un orifice rectangulaire sans contraction et égal à la section précitée, il faut en même temps, pour tenir compte des forces relativement

(*) Ces considérations ne seraient plus applicables, sans modification, aux déversoirs avec contraction latérale, parce qu'alors il faudrait, aux pertes de chute dues à l'ascension d'une partie des molécules dans des plans verticaux, ajouter celles qui correspondent aux forces vives transversales communiquées à une partie du courant liquide.

perdues, considérer cet orifice comme noyé de la hauteur $SC = e$, à laquelle ces forces, par suite de la présence du barrage, élèvent et soutiennent la surface liquide, et prendre pour hauteur effective de pression statique, sur la section dont il s'agit, celle à laquelle remonte, au-dessus du point C, le sommet de la colonne des tubes hydrostatiques, c'est-à-dire la quantité $H - e$.

Remarquons maintenant que, dans la pratique, la section BD ne se trouvera jamais à une distance du barrage plus grande que 3 mètres, qu'elle en sera généralement plus rapprochée, et qu'on pourra toujours choisir, pour établir celui-ci, une partie du cours d'eau dont le fond s'éloigne assez peu de l'horizontalité pour que l'on puisse, sans erreur sensible, prendre $BD = S + H$. En définitive, nous substituerons, dans la formule générale (a), les valeurs

$$A = LH, \quad O = L(S + H), \quad h = H - e,$$

d'où il résulte, pour les canaux à section rectangulaire, et en faisant

$$\frac{H - e}{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{S}{H}} \right)^2} = H',$$

la formule simple

$$Q = LH \sqrt{2gH'},$$

qui se présente sous la forme usitée et dont les praticiens pourront se servir en continuant à chercher les valeurs du facteur $\sqrt{2gH'}$ dans les Tables ordinaires des hauteurs dues à différentes vitesses.

Cette formule peut être également mise sous la forme

$$(a') \quad Q = \frac{S + H}{\sqrt{(S + H)^2 - H^2}} \sqrt{1 - k} \cdot LH \sqrt{2gH},$$

qui met en évidence la loi des coefficients de l'ancienne formule, le premier facteur se rapportant à l'influence de la charge et de la hauteur du barrage, le second à celle de la forme et de la nature de la nappe liquide.

Pour les canaux à section trapézoïdale ou les cours d'eau naturels, si l'on désigne par

- L la longueur de la crête du barrage ;
- L' la largeur de la surface liquide dans la section initiale ;
- l celle du fond du lit dans cette section ;
- r le rapport de la base à la hauteur des talus latéraux, on aura

$$O = \frac{1}{2} (L' + l) (S + H), \quad A = \frac{1}{2} (L' + L) H, \quad L' = L + 2rH,$$

et, pour la formule de la dépense,

$$(b) \quad Q = \frac{S + H}{\sqrt{(S + H)^2 - H^2 \left(\frac{L' + L}{L' + l} \right)^2}} \sqrt{1 - k} \cdot \frac{1}{2} (L' + L) H \sqrt{2gH},$$

qui peut être ramenée, comme la première, à la forme

$$Q = L_1 H \sqrt{2gH_1},$$

en faisant

$$\frac{L' + L}{2} = L_1, \quad \text{et} \quad H_1 = \frac{H - e}{1 - \left(\frac{L' + L}{L' + l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{S}{H}} \right)^2}.$$

Les valeurs de Q , données par les formules (a') et (b), peuvent être obtenues au moyen de constructions géométriques qu'il serait superflu d'indiquer. Enfin, si l'on veut les calculer par logarithmes, il suffira de remarquer que $\sqrt{(S + H)^2 - H^2} = \sqrt{S(S + 2H)}$ et d'effectuer une transformation analogue dans la formule (b).

Détermination pratique des éléments du calcul. — On verra plus loin que le facteur $\sqrt{1 - k}$ peut être regardé comme constant et égal à 0,417 dans le cas des nappes libres, ce qui dispense de la mesure de l'épaisseur verticale e de la nappe au-dessus du seuil du déversoir. Pour les autres genres de nappes, lorsque la hauteur du barrage ne différera pas notablement de celles qui sont inscrites dans les tableaux VII et X, on pourra, de ces tableaux, déduire la valeur de $\sqrt{1 - k}$ correspondante à la charge observée. Dans le

cas contraire, il faudra mesurer directement l'épaisseur e . A cet effet, on posera au-dessus de la crête du barrage, sur les bords du canal, une traverse solide, bien fixée; en un point de cette traverse, qui ne soit pas trop rapproché de l'extrémité du déversoir, on clouera une règle verticale; le long de cette règle on fera glisser une autre règle, portant une pointe quelconque à sa partie inférieure, jusqu'à ce que cette pointe touche la crête du barrage, et l'on tracera sur les deux règles à la fois une petite ligne de repère; on retirera ensuite la règle mobile et on laissera à la nappe le temps de reprendre son mouvement de régime; enfin on fera de nouveau glisser la tige mobile le long de la règle fixe jusqu'à ce que la pointe dont elle est armée affleure la surface de la nappe, et l'on marquera sur la règle fixe le point correspondant à la position actuelle du repère mobile.

Quant à la détermination de la charge H , on a vu comment, en appliquant verticalement un tube droit, ouvert à ses deux extrémités, contre la crête du barrage, on peut mesurer immédiatement cette charge, en un point quelconque de la longueur de cette crête, à partir d'une faible distance des bords du canal, si toutefois on a eu soin de l'établir horizontalement, précaution nécessaire dans toute hypothèse. Si l'on veut éviter la mesure de la colonne hydrostatique sur place, il suffira d'armer le tube de deux petites douilles évidées et à oreilles p, p' (*fig. 10*), serrées par une vis; on appuiera la saillie de la douille inférieure p' contre la crête du barrage, et l'on fera glisser la douille supérieure jusqu'à ce que l'une de ses arêtes horizontales soit au niveau du sommet de la colonne liquide. Cette douille pourra être, si l'on veut, remplacée par un fil noué autour du tube et la première p' , par un petit prisme de bois dans lequel ce tube sera engagé. Il faut, avant de s'en servir, laver intérieurement le tube et s'assurer que l'eau le mouille bien dans toute sa longueur. En second lieu, il faut connaître la hauteur du ménisque dû aux actions capillaires, ce qui serait facile en le plongeant dans un vase rempli d'eau. Mais on peut éviter cette opération: en effet, le tube qui m'a servi avait 0^m,013 de diamètre intérieur, et la hauteur du ménisque était de 0^m,0023; or elle sera la même dans tous les tubes où le milieu du sommet de la colonne liquide sera plan. Pour les tubes dits *capillaires*, la hauteur du ménisque sera assez exactement donnée par la formule $\frac{29,8}{d}$, d étant le diamètre intérieur en millimètres. Quant aux oscillations de la colonne

liquide, elles sont assez faibles pour ne causer aucune incertitude lorsque l'atmosphère est tranquille et que l'alimentation de l'orifice est régulière; si l'on est obligé d'opérer sous l'influence du vent, on mesurera la plus grande et la plus petite hauteur au-dessus du sommet du déversoir, et l'on adoptera pour valeur de la charge la moyenne entre ces deux hauteurs. Enfin, lorsque la largeur du barrage n'est pas très-grande par rapport au diamètre extérieur du tube, ce qui d'ailleurs arrivera rarement dans la pratique, il faut savoir tenir compte de la place occupée par ce tube dans la section d'écoulement. Pour déterminer cette correction, j'ai mis à profit l'une des propriétés énoncées ci-dessus, et j'ai mesuré les charges au moyen d'un tube recourbé *a' b' c'* (fig. 11) introduit, à travers la paroi du canal, contre la face d'amont du barrage; ce tube était muni d'une douille en cuivre *d* à frottement doux et avec vis de pression *v*. On a placé le tube droit ordinaire *TT'* dans le plan du barrage, on a mesuré directement la hauteur *TS* de la colonne dans ce tube au-dessus de la crête *SS'* du barrage, puis on a fixé la douille *d* du tube recourbé de façon que la distance du plan supérieur *n* de cette douille, au sommet *m* de la colonne dans le dernier tube, fût égale à *TS*: on a vérifié ensuite, pour une charge très-différente de la première, l'exactitude de ce procédé.

Cela posé, on a jaugé directement la dépense du barrage avec et sans la présence du tube *TT'*, et l'on a calculé la largeur qu'il fallait supposer à ce barrage dans le premier cas, pour que la dépense fût la même que dans le second, tout étant égal d'ailleurs. On a obtenu les résultats suivants, la largeur du barrage étant 0^m,896.

TABLEAU N° VIII.

| CHARGE. | DÉPENSE PAR SECONDE | | LARGEUR RÉDUITE. |
|---------|---------------------|---------------|------------------|
| | sans le tube. | avec le tube. | |
| m | m cube | m cube | m |
| 0,0790 | 0,03728 | 0,03633 | 0,874 |
| 0,0880 | 0,04377 | 0,04227 | 0,865 |
| 0,1080 | 0,05868 | 0,05730 | 0,874 |
| 0,1220 | 0,06989 | 0,06903 | 0,885 |
| 0,1290 | 0,07829 | 0,07699 | 0,881 |
| 0,1455 | 0,09592 | 0,09371 | 0,875 |
| 0,1480 | 0,09878 | 0,09654 | 0,8755 |
| 0,1650 | 0,12663 | 0,12305 | 0,871 |
| | Moyenne..... | | 0,875 |

Ainsi la correction relative à un même tube est constante. Pour le tube de $0^m,015$ de diamètre extérieur, qui nous a servi dans ces expériences, la quantité à retrancher de la largeur du barrage était, comme l'on voit, $0^m,021$, ou 1^{fois},4 le diamètre de ce tube : pour un tube du calibre extérieur de $0^m,010$, j'ai trouvé en moyenne $0^m,013$ ou 1^{fois},3 ce diamètre ; ainsi la correction proportionnelle diminue avec le diamètre des tubes, et l'on pourra la négliger très-fréquemment. Cette correction est d'ailleurs nécessitée, non pas seulement par l'emplacement occupé sur la largeur du barrage, mais par les ondes excitées autour du tube ; quand la charge augmente, la saillie de ces ondes s'accroît en même temps, mais, en compensation, elles s'étendent, latéralement, à une moins grande distance.

En outre, on peut éviter toute correction de largeur en plongeant le tube derrière le barrage au moment où l'on est disposé à mesurer la charge, et ne l'y laissant que pendant le temps strictement nécessaire pour amener une douille mobile au niveau du sommet de la colonne hydrostatique. Lorsqu'on aura acquis un peu d'habitude, on effectuera cette opération assez vite pour que la présence du tube ne puisse modifier sensiblement le régime du courant, ce dont on devra d'ailleurs s'assurer au moyen d'un repère fixe affleurant la surface d'amont. Enfin les tableaux VI et VII dispenseront, pour un grand nombre de cas, de l'emploi du tube.

Comparaison des résultats de l'expérience avec ceux de la formule proposée.

Avant d'entrer dans les détails numériques, il convient d'examiner si cette formule, qui renferme toutes les données essentielles de l'écoulement, ne laisse pas en dehors quelques phénomènes accessoires, mais susceptibles d'influer un peu, dans certaines circonstances, sur l'exactitude des résultats du calcul.

Occupons-nous d'abord du cas des canaux rectangulaires et des nappes libres : la première cause perturbatrice qui se présente consiste en ce que, selon les observations précédemment rapportées, dans une certaine longueur du barrage, à partir de chaque extrémité, les molécules venant du fond du canal se dirigent vers ces extrémités, c'est-à-dire vers les angles de l'orifice. Or notre formule ne tient compte que des mouvements verticaux ; de sorte

que, si une portion de la force vive initiale des particules liquides se dépense dans des mouvements horizontaux de déviation, la formule doit donner des résultats trop forts : mais cette circonstance n'ayant lieu que pour une partie des molécules inférieures, son influence ne sera sensible que pour les petites charges ou faibles épaisseurs des nappes. D'un autre côté, la masse d'air contenue sous la nappe étant, sous les grandes charges, à une pression un peu inférieure à celle de l'atmosphère, comme nous l'avons constaté, la formule proposée, qui suppose la pression atmosphérique, tend alors à fournir des résultats trop faibles. Ainsi, dans le cas des nappes libres et des canaux rectangulaires, cette formule doit conduire à des dépenses un peu en excès pour les petites charges, et un peu trop petites sous les grandes.

Lorsque la nappe est noyée en dessous, les mouvements déviatoires précités tendent aussi, concurremment avec les oscillations (*) des particules voisines du glacis du barrage, à rendre un peu trop forts les résultats théoriques ; mais, d'un autre côté, la promptitude avec laquelle l'air extérieur se précipite sous la nappe en cet endroit, lorsqu'on y plonge un corps solide, prouve que la pression y est inférieure à celle de l'atmosphère, au moins dans la région voisine du sommet du barrage. Ces deux causes perturbatrices ayant des influences contraires simultanées et, d'ailleurs, négligeables toutes deux pour les nappes épaisses, la formule doit donner des résultats pratiquement exacts.

Quant aux canaux à section trapézoïdale, il est facile de voir que leur forme même introduit des mouvements particuliers dont la théorie ne saurait tenir compte, savoir : 1° un resserrement latéral de la portion supérieure de la nappe, qui occupe une plus grande largeur à son origine que dans le plan du déversoir, en vertu de sa chute et des talus du canal ; 2° un épanouissement des faisceaux de filets provenant du fond. Ainsi, dans ce cas, la formule théorique devra être affectée d'un coefficient de correction.

Enfin, quels que soient le profil du canal et la nature de la nappe, les charges observées à l'aide du tube hydrostatique sont un peu plus fortes que celles qui résulteraient de la mesure directe de la hauteur de la section ini-

(*) Ces mouvements oscillatoires s'accomplissent seulement dans l'espace compris entre le glacis et la nappe proprement dite.

tiale au-dessus du seuil du déversoir; mais cette différence, représentant, comme on l'a dit plus haut, l'excès de pression qui résulte, dans la région où se forme la veine, de la vitesse initiale des particules fluides, est plutôt avantageuse que nuisible à l'exactitude des calculs. On a vu, d'ailleurs, qu'elle ne s'élève pas à plus de $\frac{1}{60}$ de la charge entière.

Ces diverses conséquences de l'observation des phénomènes physiques sont d'accord avec les résultats des expériences de jaugeage, comme le montrent les tableaux de ces résultats que nous allons donner successivement. Disons d'abord de quelle manière ces tableaux ont été composés.

Composition des tableaux des résultats de l'expérience. — La formule de l'écoulement par-dessus les barrages, mise sous sa forme la plus générale, est, d'après ce qui a été dit précédemment à cet égard,

$$Q = A \sqrt{2g \frac{H-e}{1-\frac{Q^2}{A^2}}} = \sqrt{1-k} \cdot A \sqrt{2g \frac{H}{1-\frac{Q^2}{A^2}}}.$$

Faisons

$$A \sqrt{2g \frac{H}{1-\frac{Q^2}{A^2}}} = N;$$

mettons pour Q la dépense obtenue par le jaugeage expérimental, que nous représenterons par D , et calculons

$$\sqrt{1-k} = \frac{D}{N};$$

la vérification de la formule consistera à comparer cette valeur de $\sqrt{1-k}$ avec celle qui correspond au rapport $k = \frac{e}{H}$ déduit de l'observation directe de e et de H .

Dans tous les tableaux, nous avons représenté, en outre, pour abrégé les titres des colonnes, par

- J la hauteur dont le niveau s'est élevé dans le bassin de jauge pendant l'opération du jaugeage;
- t le temps employé pour cette élévation de niveau, exprimé en secondes sexagésimales.

Toutes les dimensions ont été écrites en millimètres, et tous les volumes en litres.

On se rappellera enfin que la section horizontale moyenne du bassin de jauge est $18^{\text{mq}},002$, si l'on veut vérifier l'exactitude des valeurs numériques de D.

CANAUX RECTANGULAIRES ET NAPPES LIBRES.

TABEAU N° IX.

| LARGEUR L DU DÉVERSOIR | | s | H | J | l | D | D N |
|------------------------|----------|-----|-------|-------|-------|---------|--------|
| effective. | réduite. | | | | | | |
| 895 | 874 | 340 | 57,7 | 226,0 | 180,0 | 22,6025 | 0,417 |
| 895 | 874 | 340 | 65,7 | 374,5 | 240,0 | 28,0906 | 0,425 |
| 898 | 877 | 490 | 75,2 | 560,0 | 299,0 | 33,7161 | 0,417 |
| 1616 | 1,595 | 468 | 79,7 | 657,0 | 178,5 | 66,2594 | 0,416 |
| 1616 | 1,595 | 468 | 88,7 | 538,5 | 120,0 | 80,7840 | 0,426 |
| 1616 | 1,595 | 468 | 93,7 | 646,0 | 135,0 | 86,1429 | 0,419 |
| 895 | 874 | 340 | 96,7 | 658,0 | 240,0 | 49,3555 | 0,414 |
| 1616 | 1,595 | 468 | 110,0 | 723,0 | 120,0 | 108,462 | 0,413 |
| 898 | 877 | 490 | 121,0 | 683,0 | 180,0 | 68,3076 | 0,409 |
| 895 | 874 | 340 | 134,0 | 842,0 | 184,0 | 82,3787 | 0,416 |
| 898 | 877 | 490 | 148,0 | 964,0 | 179,5 | 96,6793 | 0,425 |
| 895 | 874 | 340 | 155,0 | 705,0 | 120,5 | 105,323 | 0,423 |
| 895 | 874 | 340 | 188,0 | 927,0 | 120,0 | 139,386 | 0,414 |
| 895 | 874 | 340 | 219,0 | 885,0 | 90,0 | 177,020 | 0,411 |
| Moyenne..... | | | | | | | 0,417 |

Les différences que présentent entre elles les quatorze valeurs du rapport $\frac{D}{N}$, c'est-à-dire du facteur $\sqrt{1-k}$ de notre formule, n'affectent aucun ordre de variation, ni par rapport aux charges, ni relativement à aucun des autres éléments du calcul; elles doivent donc être attribuées à de légères inexactitudes dans l'observation, soit des charges, soit des hauteurs J, erreurs qu'il était bien difficile d'éviter entièrement, l'atmosphère ayant été rarement très-calme. Ces différences sont d'ailleurs faibles; ainsi la moyenne 0,417 diffère à peine de $\frac{1}{45}$, en plus ou en moins, des valeurs qui s'en écartent le plus.

Reportons-nous maintenant au tableau que nous avons donné des valeurs de $\frac{H}{e}$ correspondantes aux nappes libres et à diverses hauteurs du barrage;

la valeur 0^m,420 de cette hauteur tient à peu près le milieu entre celles qui avaient lieu dans les expériences de jaugeage. Prenons la moyenne des valeurs de $\frac{H}{e}$ correspondantes à cette hauteur, et aux charges depuis 0^m,06 jusqu'à 0^m,200 inclusivement : cette moyenne est 1,214, et la valeur du même rapport, calculée d'après celle 0,417 du facteur $\sqrt{1-k}$, est 1,211 ; différence proportionnelle, $\frac{1}{406}$.

Conséquences pratiques ; coefficients de l'ancienne formule. — On pourra calculer la dépense d'un déversoir sans contraction latérale, lorsque la nappe se détachera du barrage en aval, par la formule

$$(d) \quad Q = 0,417 LH \sqrt{2g \frac{H}{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{S}{H}} \right)^2}};$$

d'où il résulte que les coefficients de l'ancienne formule $Q = LH \sqrt{2gH}$, qui sont représentés ici par la quantité

$$\frac{0,417}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{S}{H}} \right)^2}},$$

varient, pour cet état de la nappe, en sens contraire du rapport $\frac{S}{H}$ de la hauteur du barrage à la charge. Si l'on veut continuer à se servir de l'ancienne formule, il faudra donc donner à son coefficient de correction les valeurs suivantes :

| Valeurs du rapport $\frac{S}{H}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Valeurs correspondantes du coefficient de l'ancienne formule. | 0,482 | 0,442 | 0,431 | 0,426 | 0,423 | 0,421 | 0,420 | 0,419 |

Comparaison des nouveaux résultats avec ceux des recherches antérieures. — Il n'existe qu'un bien petit nombre d'éléments pour cet examen comparatif : en effet, aucun des observateurs précédents n'a songé à distin-

guer les différentes espèces de nappes ; très-peu ont indiqué la hauteur ou même la forme du barrage dont ils se sont servis, et le point de départ adopté pour la mesure des charges. Celles qu'indique M. Bidone, et les valeurs correspondantes de l'épaisseur e de la nappe, laissent trop d'incertitude, comme on peut s'en convaincre par l'examen de ces valeurs, savoir :

| | | | | | | |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| H. | 74 | 95 | 115 | 149 | 169 | 196 |
| $\frac{H}{e}$ | 1,222 | 1,254 | 1,275 | 1,269 | 1,304 | 1,217 |

Le rapport $\frac{H}{e}$, bien que variant irrégulièrement, paraît augmenter ici avec la charge H , tandis que les nombreuses observations consignées dans les tableaux VI et VII prouvent que ce rapport varie régulièrement dans le sens inverse.

M. Castel, dans ses expériences déjà citées, a modifié le régime en amont du déversoir par l'interposition d'écrans dont l'influence perturbatrice, très-faible lorsque la vitesse d'amont l'était elle-même par suite du rétrécissement de l'orifice, ne peut être négligée dans le cas où la largeur du déversoir était égale à celle du canal, d'autant plus que la hauteur S du barrage n'était que de $0^m,170$; car si, pour les petites charges, la vitesse d'amont était faible, d'un autre côté l'erreur relative était notable : circonstances qui ont restreint l'utilité d'observations effectuées d'ailleurs entre des limites étendues et avec le plus grand soin.

Dubuat (*) a fait cinq expériences sans contraction latérale, dans un canal rectangulaire de $0^m,487$ de largeur, barré par une planche de $0^m,110$ seulement de hauteur, et de $0^m,027$ d'épaisseur, équarrie au sommet ; circonstance différente de celle du barrage à biseau que nous avons employé, et qui a pour effet, aux faibles charges, de faire adhérer la nappe contre la plate-forme horizontale supérieure. En outre, la manière dont l'auteur désigne les charges laisse de l'incertitude sur leur valeur exacte. Enfin, dans trois de ces cinq expériences, l'eau d'aval s'élevait jusqu'à une distance du sommet du barrage, nulle ou égale à $0^m,018$ seulement ; dans la quatrième

(*) *Principes d'Hydraulique*, tome II, section II, chapitre 1.

et la cinquième, la nappe tombait sur la surface d'un réservoir dont la hauteur n'est pas indiquée. Pour une seule de ces expériences, Dubuat dit que « l'eau reversait en l'air et *faisait nappe*.... » Mais ici la charge qu'il indique n'était que de $0^m,034$, de sorte que l'adhérence à la plate-forme du barrage devait diminuer la dépense, sans préjudice de l'influence que pouvait exercer, dans le même sens, la hauteur non connue de la surface liquide sur laquelle tombait la nappe.

M. Fourneyron, ayant jaugé, au moyen d'un grand bassin, un courant d'eau passant par-dessus un barrage sans contraction latérale, nous a dit avoir trouvé $0^m,42$ pour valeur du coefficient de l'ancienne formule, la hauteur du barrage étant égale à sept ou huit fois celle de la charge, valeur égale à celle que donne la formule nouvelle pour les mêmes proportions.

Influence de la largeur du déversoir. — Lorsque la nappe d'un déversoir subit des contractions latérales, la largeur relative de l'orifice, en faisant varier le degré de la contraction, influe nécessairement sur la dépense, toutes choses étant égales d'ailleurs : les expériences de M. Eytelwein (*), de M. Castel et celles de M. Hirn (**), ne laissent aucun doute à cet égard. Lors même que la contraction latérale est complète, ce qui paraît avoir lieu dans le cas où les côtés de l'orifice sont à une distance des parois correspondantes du réservoir, égale à une fois et demie la largeur de cet orifice, les variations de la grandeur absolue de cette dernière dimension, en modifiant la proportion des filets déviés relativement à ceux qui ne le sont pas, doit, entre certaines limites, n'être pas sans influence sur le débit par mètre courant dû à une même hauteur de charge. Dans le cas où la contraction latérale est entièrement supprimée, la résistance des parois du canal au mouvement de la veine et les légères déviations qui se produisent aux extrémités du barrage, dans le mouvement ascensionnel des particules inférieures, peuvent modifier la dépense des déversoirs très-étroits ; mais leur influence, toujours faible, doit devenir tout à fait négligeable pour les largeurs qui peuvent se présenter dans la pratique. On objectera, il est vrai, que, dans le canal, les filets ont des vitesses croissantes, des parois latérales vers le milieu, suivant

(*) *Manuel de Mécanique et d'Hydraulique.*

(**) *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, n° 94 (1846).

une certaine fonction de la distance à ces parois, fonction dont les coefficients dépendent de la largeur du courant. A ce sujet, il faut remarquer, d'abord, que les profils transversaux de la veine depuis la section initiale jusqu'au-dessus du barrage étant des lignes droites horizontales, la charge est la même sur tous les points de la largeur du déversoir, et que les vitesses qui seraient dues à ces charges sont de beaucoup supérieures à celles qui ont lieu dans le canal. En outre, la variation de ces vitesses dans le sens de la largeur est assez faible; ainsi, à 4^m,50 en amont d'un barrage vertical de 0^m,376 de hauteur, et pour une charge H de 0^m,224, j'ai trouvé que les vitesses v des particules de la surface, qui passaient à une distance x du milieu, étaient représentées avec une grande approximation par la formule

$$v = 0^m,351 - 0,538 x^2,$$

0^m,351 étant la vitesse au milieu, et la plus grande valeur de x étant 0^m,455. A mesure que le canal s'élargit, le coefficient de x^2 diminue, de sorte que la différence entre la plus grande et la plus petite vitesse reste comprise entre des limites peu étendues.

En définitive, les résultats de l'expérience prouvent que l'influence de la largeur d'un déversoir sans contraction latérale, sur son débit par mètre courant, est négligeable. Ainsi cette influence ne s'est pas manifestée, dans nos expériences, en passant de la largeur 0^m,895 à 1^m,616. Dans celles de M. Castel, les coefficients obtenus avec un barrage de 0^m,36 de largeur sont à très-peu près égaux à ceux qui correspondent à celui de 0^m,74, et ce sont même les premiers qui sont les plus grands, circonstance qui tient à des influences anormales: les uns et les autres sont un peu en excès sur les nôtres. Dans l'expérience précitée de M. Fourneyron, la largeur du barrage était supérieure à 2 mètres, et cependant cet ingénieur a obtenu un coefficient identique à celui qui se déduit de nos expériences sur des largeurs inférieures à la moitié de celle-ci. Enfin, M. Marozeau ayant fait d'intéressantes expériences au frein sur une roue de côté alimentée par un déversoir de 4^m,350 de largeur (*), j'ai déterminé, par des jaugeages directs, le coefficient qui convenait à un déversoir de même forme, et d'une largeur de 0^m,900

(*) *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, n° 86 (1844).

seulement : la valeur trouvée porterait le rendement de la roue dont il s'agit à 76 pour 100 ; ce qui permet de la regarder comme égale, à très-peu près, à celle qui convenait au déversoir de 4^m,350, cette roue se distinguant par des dispositions favorables à son effet utile.

Ces diverses preuves suffiront sans doute pour faire regarder pratiquement comme proportionnelle à leur largeur, la dépense des déversoirs sans contraction latérale, dans le cas où cette largeur n'est pas très-petite et inférieure, par exemple, à 0^m,20 ou 0^m,30.

Canaux rectangulaires et nappes adhérentes ou noyées en dessous.

Dans ces expériences, exécutées en octobre 1846, on mesurait, comme dans les autres, les charges H au moyen du tube, mais on le retirait immédiatement après, en ne le laissant plongé dans la nappe que pendant le temps très-court nécessaire pour effectuer cette mesure. On s'affranchissait ainsi de la correction constante de la largeur du barrage ; c'est ce qu'on pourra toujours faire dans la pratique comme nous l'avons dit précédemment.

TABLEAU N° X.

L = 0^m,896 S = 0^m,335.

| H | $k = \frac{e}{H}$ | t | J | D | VALEUR DU FACTEUR $\sqrt{1 - k}$ | | DIFFÉRENCES proportionnelles |
|----------------------------------|-------------------|----------------------|-------|---------|----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| | | | | | calculée par la formule. | résultant de l'observation. | |
| <i>Nappes adhérentes.</i> | | | | | | | |
| 49,2 | 0,803 | 390 ^{''} ,0 | 416 | 19,2021 | 0,440 | 0,438 | $-\frac{1}{219}$ |
| 78,7 | 0,765 | 290,0 | 656 | 43,2048 | 0,485 | 0,484 | $-\frac{1}{484}$ |
| <i>Nappes noyées en dessous.</i> | | | | | | | |
| 165,0 | 0,797 | 124,5 | 873,5 | 126,303 | 0,451 | 0,451 | 0 |
| 189,0 | 0,809 | 116,0 | 975 | 151,310 | 0,433 | 0,437 | $+\frac{1}{109}$ |
| 208,0 | 0,815 | 110,0 | 1,053 | 172,328 | 0,425 | 0,430 | $+\frac{1}{86}$ |
| 233,0 | 0,820 | 107,5 | 1,222 | 204,637 | 0,421 | 0,424 | $+\frac{1}{141}$ |
| 268,0 | 0,830 | 89,0 | 1,229 | 248,488 | 0,408 | 0,412 | $+\frac{1}{103}$ |

L'accord des valeurs de $\sqrt{1-k}$, résultant de l'observation directe, avec celles qui ont été obtenues par le calcul, suffit pour établir la complète exactitude pratique de la nouvelle formule appliquée au cas des canaux rectangulaires et des nappes adhérentes au barrage ou noyées en dessous.

Coefficients de l'ancienne formule. — On voit que, pour ces cas dont le dernier se présentera souvent dans le jaugeage des cours d'eau, à cause de la nécessité d'employer des barrages peu élevés qui ne fassent pas trop gonfler les eaux d'amont, les coefficients de la formule ancienne

$$Q = LH\sqrt{2gH}$$

sont représentés par l'expression

$$\frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+\frac{S}{H}}\right)^2}}$$

et sont, par conséquent, sujets à deux causes de variations, savoir, 1° celle du facteur $\sqrt{1-k}$ qui augmente avec la charge dans le cas des nappes adhérentes, et varie dans le sens inverse pour les nappes noyées en dessous; 2° celle du rapport $\frac{S}{H}$ qui varie avec la hauteur du barrage pour une même charge, et avec la charge pour une même hauteur, complications qui, en supposant même qu'on eût dressé des Tables étendues de coefficients, exposeraient encore à des méprises les personnes peu exercées à l'observation des phénomènes physiques, et ont peut-être occasionné plus d'une erreur dans les jaugeages antérieurement effectués. Le nouveau moyen de calcul, qui supprime les coefficients de correction, n'expose en outre à aucune incertitude, tout en n'exigeant que la mesure toujours facile de l'épaisseur e de la nappe au-dessus de la crête du déversoir, mesure dont on sera même dispensé, pour des hauteurs de barrage de 0^m,30 à 0^m,40, par les données numériques suivantes qu'on substituera dans la formule

$$Q = \sqrt{1-k} \cdot LH \sqrt{2g \frac{H}{1-\left(\frac{1}{1+\frac{S}{H}}\right)^2}} :$$

TABLEAU N° XI.

| CHARGES H indiquées par un tube placé verticalement en amont du barrage. | VALEURS correspondantes du facteur $\sqrt{1-k}$ | OBSERVATIONS. |
|--|--|------------------------------|
| 50 | 0,438 | Nappes adhérentes. |
| 80 | 0,484 | |
| 120 | 0,474 | Nappes noyées en dessous. |
| 130 | 0,469 | |
| 140 | 0,454 | <i>Idem.</i> |
| 150 | 0,458 | |
| 160 | 0,453 | " |
| 180 | 0,443 | |
| 200 | 0,434 | " |
| 220 | 0,427 | |
| 240 | 0,421 | " |
| 260 | 0,415 | |
| 280 | 0,411 | " |
| 300 | 0,406 | |

CANAUX A SECTION TRAPÉZOIDALE.

On a établi, dans le canal d'expériences et sur une longueur de 7 mètres, des talus en charpente inclinés à 1 de hauteur sur 0,565 de base (*fig. 15*); à 0^m,600 environ de l'extrémité d'aval du nouveau canal ainsi formé, on a placé un barrage vertical à biseau et glacis à 45 degrés : l'extrémité d'amont des parois latérales du même canal était raccordée avec celles du canal rectangulaire, et des précautions convenables ont été prises pour empêcher toute filtration d'eau susceptible d'introduire des anomalies dans les résultats.

D'après les dimensions des diverses parties de ce dispositif, on avait, en conservant les notations adoptées dans l'exposition des formules,

$$L = 0^m,570, \quad l = 0^m,211, \quad r = 0,565; \quad \text{d'où} \quad L' = 0^m,570 + 1,13H.$$

Quant à la hauteur S du barrage au-dessus du fond du canal, elle était, pour la première expérience du tableau suivant, égale à 0^m,322; mais un certain temps s'étant écoulé entre cette expérience et les autres, le bois s'était gonflé, et la hauteur S était devenue égale à 0^m,324. Dans une partie de ces

expériences, on ne laissait pas le tube indicateur des charges plongé dans la nappe, de sorte qu'il n'y a eu lieu à aucune correction de largeur. Dans les autres, au contraire, le tube est resté en permanence contre la face d'amont du barrage, et, pour tenir compte de cette circonstance, l'on a eu soin de faire la correction convenable, que nous avons déterminée par la méthode exposée précédemment; cette correction est encore ici à très-peu près indépendante des charges, et consistait, pour le tube de 0^m,015 de diamètre extérieur, à réduire la largeur moyenne de la nappe dans le rapport de 1 à 0,976. On fera bien, dans les applications, de l'éviter. Le remous qui se formait en aval au pied du barrage, par suite de la convergence des talus, empêchait, même aux petites charges, la nappe de se détacher; effet qui doit se produire dans tous les cas de barrages peu saillants, établis entre des talus rapprochés. Des observations relatives à la valeur du rapport $\frac{H}{e}$, dont la première partie, concernant les petites charges, a été perdue avec la feuille de papier qui les contenait, en même temps que plusieurs jaugeages, m'ont conduit aux résultats suivants :

| H | $\frac{H}{e}$ |
|---------------|---------------|
| 115 | 1,230 |
| 160 | 1,241 |
| Moyenne. | 1,235 |
| 219 | 1,203 |
| 237 | 1,203 |
| 283 | 1,195 |

Ainsi, comme dans les canaux rectangulaires, le rapport $\frac{H}{e}$ varie ici en sens inverse de H, mais moins rapidement. Les valeurs de ce rapport correspondantes aux mêmes charges, diffèrent très-peu, d'ailleurs, de celles qui ont lieu dans le premier cas pour les nappes noyées en dessous et une même hauteur du barrage.

Dans le tableau suivant on a désigné par un astérisque les expériences

SUR LE JAUGEAGE DES COURS D'EAU A FAIBLE OU A MOYENNE SECTION. 185
dans lesquelles le tube restait en permanence contre la face d'amont du barrage. Celles-ci et les autres ont été exécutées du 10 au 15 septembre 1847.

CANAL A SECTION TRAPÉZOÏDALE ; NAPPES NOYÉES EN DESSOUS.

TABLERAU N° XII.

| DÉSIGNATION. | H | L' | J | t | D | $\frac{D}{N}$ ou valeur calculée de $\sqrt{1-k}$. | $\sqrt{1-k}$ d'après l'observation de H et de c. | RAPPORT de ces deux valeurs. |
|--------------|-----|-----|-------|-------|---------|--|--|------------------------------------|
| 1* | 115 | 700 | 942 | 361,0 | 46,9748 | 0,408 | " | " |
| 2 | 160 | 751 | 1,003 | 211,0 | 85,5735 | 0,408 | " | " |
| 3 | 160 | 751 | 989 | 207,5 | 85,8221 | 0,409 | " | " |
| 4* | 162 | 753 | 999,5 | 209,5 | 85,8467 | 0,410 | " | " |
| 5* | 162 | 753 | 1,005 | 211,5 | 85,5414 | 0,409 | " | " |
| MOYENNE..... | | | | | | 0,409 | 0,436 | 0,938 |
| 6* | 219 | 817 | 1,008 | 133,5 | 135,925 | 0,372 | " | " |
| 7* | 219 | 817 | 1,004 | 133,0 | 135,962 | 0,372 | " | " |
| 8 | 217 | 815 | 1,012 | 133,5 | 136,563 | 0,371 | " | " |
| 9 | 217 | 815 | 1,015 | 134,0 | 136,358 | 0,370 | " | " |
| MOYENNE..... | | | | | | 0,3712 | 0,4107 | 0,904 |
| 10 | 234 | 834 | 1,013 | 118,5 | 153,894 | 0,361 | " | " |
| 11* | 237 | 838 | 1,045 | 122,6 | 153,443 | 0,360 | " | " |
| MOYENNE..... | | | | | | 0,3605 | 0,4107 | 0,877 |
| 12 | 283 | 890 | 1,017 | 89,5 | 204,559 | 0,331 | " | " |
| 13* | 288 | 895 | 1,074 | 94,0 | 205,682 | 0,330 | " | " |
| MOYENNE..... | | | | | | 0,3305 | 0,403 | 0,820 |

Ces résultats confirment ce qui a été dit plus haut relativement à l'effet de la convergence des parois du canal, effet qui se fait d'autant plus sentir, pour un même angle des talus, que la chute à la surface de la nappe, depuis la section initiale jusqu'au barrage, est plus considérable. Lorsque ces talus sont en terre, leur pente est plus allongée et la convergence de la nappe liquide augmente, de sorte que les coefficients de réduction de la dépense théorique doivent être un peu plus faibles, à égalité de valeur des charges, que ceux qui sont inscrits dans la dernière colonne de ce tableau. C'est pourquoi, continuant ces recherches en 1848, nous avons établi, dans la portion élargie d'aval de ce canal, des talus en charpente sous une inclinaison égale à celle des terres coulantes. Ainsi qu'en 1847, des précautions

suffisantes ont été employées pour empêcher toute fuite d'eau susceptible de causer des anomalies dans les résultats. La portion de canal trapézoïdal ainsi construite avait 3^m,80 de longueur, et le barrage était placé à 3^m,40 environ de son origine d'amont raccordée d'ailleurs avec les parois du canal rectangulaire. La longueur AB (*fig.* 16) de ce barrage était 1^m,030 = L, et l'on avait, par suite de l'inclinaison des talus, le rapport

$$r = \frac{DE}{EC} = \frac{0,811}{0,577} = 1,4055,$$

d'où

$$L' = L + 2 r H = 1^m,030 + 2,811 \cdot H;$$

enfin, la hauteur S du barrage était 0^m,352. Des expériences comparatives faites avec ou sans tube ont montré que, pour tenir compte de la présence de celui-ci contre la crête du barrage pendant l'écoulement, il suffisait de réduire, dans le rapport constant de 1 à 0,978, la largeur moyenne $\frac{1}{2}(L' + L)$ de la section $A = \frac{1}{2}(L' + L) H$ du déversoir dans le second facteur de la formule

$$Q = \sqrt{1-k} \cdot A \sqrt{2g \frac{H}{1-\frac{A^2}{O^2}}}.$$

Le tableau suivant contient les résultats de l'observation et ceux du calcul; on y a désigné par un astérisque ceux qui correspondent aux cas où le tube indicateur des charges restait en permanence contre la face d'amont du barrage. Les expériences ont été exécutées du 13 au 17 juillet 1848.

TABLEAU N° XIII.

| NUMÉROS d'ordre | H | v | $\frac{H}{v}$ | L' | J | r | $D = \frac{18,002 \cdot J}{r}$ | $\frac{v}{H} = k$ | VALEUR du facteur $\sqrt{1 - k}$ | | RAPPORT de ces deux valeurs. |
|--|-------|-------|-------------------------------|------|--------|-------|--|-------------------|--|-----------------------------------|---------------------------------------|
| | | | | | | | | | calculée au moyen de la formule. | résultant de l'observation. | |
| <i>Nappes libres, ou détachées du barrage.</i> | | | | | | | | | | | |
| 1* | 75,0 | 59,3 | 1,264 | 1213 | 678,5 | 274,0 | 44,578 | 0,7910 | 0,4175 | 0,4572 | 0,9132 |
| 2* | 82,7 | 65,5 | 1,463 | 1234 | 861,0 | 302,0 | 51,323 | 0,7916 | 0,4080 | | |
| 3 | 80,7 | 63,9 | | 1257 | 716,0 | 242,0 | 53,262 | | 0,4316 | | |
| | | | | | | | MOYENNE | | 0,4198 | 0,4565 | 0,9196 |
| 4* | 106,0 | 84,3 | 1,258 | 1299 | 865,5 | 186,0 | 83,767 | 0,7952 | 0,4334 | | |
| 5* | 105,0 | 83,5 | | 1296 | 871,0 | 199,0 | 82,525 | | 0,4342 | | |
| 6 | 103,0 | 81,9 | | 1319 | 820,0 | 182,0 | 81,108 | | 0,4316 | | |
| | | | | | | | MOYENNE | | 0,4331 | 0,4525 | 0,9571 |
| <i>Nappes noyées en dessous.</i> | | | | | | | | | | | |
| 7* | 123,0 | 98,2 | 1,252 | 1346 | 995,0 | 164,0 | 109,220 | 0,7985 | 0,4329 | | |
| 8* | 122,0 | 97,4 | | 1343 | 976,0 | 160,0 | 109,812 | | 0,4410 | | |
| 9 | 121,0 | 96,6 | | 1370 | 911,0 | 150,0 | 109,332 | | 0,4370 | | |
| | | | | | | | MOYENNE | | 0,4370 | 0,4489 | 0,9734 |
| 10* | 137,0 | 110,0 | 1,246 | 1384 | 956,0 | 134,0 | 128,432 | 0,8025 | 0,4183 | 0,4444 | 0,9413 |
| 11* | 147,0 | 118,0 | 1,243 | 1411 | 1043,0 | 132,0 | 142,243 | 0,8048 | 0,4064 | | |
| 12 | 146,0 | 117,5 | | 1440 | 986,0 | 125,0 | 142,000 | | 0,4123 | | |
| | | | | | | | MOYENNE | | 0,4093 | 0,4418 | 0,9266 |
| 13* | 156,0 | 126,0 | 1,238 | 1436 | 985,5 | 113,0 | 157,000 | 0,8077 | 0,4016 | | |
| 14* | 155,0 | 125,0 | | 1434 | 986,5 | 113,5 | 156,546 | | 0,4039 | | |
| | | | | | | | MOYENNE corrigée par interpolation graphique | | 0,399 | 0,4385 | 0,9076 |
| 15* | 163,0 | 132,0 | 1,235 | 1455 | 1042,0 | 112,5 | 166,818 | 0,8097 | 0,3877 | 0,4362 | 0,8888 |
| 16* | 174,0 | 141,6 | 1,229 | 1486 | 1077,0 | 106,0 | 182,907 | 0,8140 | 0,3747 | | |
| 17* | 174,0 | 141,6 | | 1486 | 993,0 | 98,0 | 189,408 | | 0,3737 | | |
| | | | | | | | MOYENNE | | 0,3742 | 0,4313 | 0,8676 |
| 18* | 193,0 | 158,0 | 1,222 | 1538 | 1003,0 | 84,0 | 214,936 | 0,8181 | 0,3643 | | |
| 19 | 192,0 | 157,0 | | 1570 | 1032,0 | 87,0 | 213,616 | | 0,3579 | | |
| | | | | | | | MOYENNE | | 0,3611 | 0,4263 | 0,8471 |
| 20 | 200,0 | " | (1,218) par interpolation. | " | " | " | " | " | (0,355) par interpolation. | " | (0,8395) par interpolation. |

Conséquences de ces résultats. — Les valeurs de $\frac{H}{e}$ donnent lieu aux mêmes observations que dans les séries d'expériences précédentes; elles varient en sens inverse de H pour les nappes libres comme pour celles qui sont noyées en dessous: elles sont un peu plus grandes, dans le premier cas, que pour les canaux rectangulaires, et un peu plus petites dans le second.

L'ensemble des rapports contenus dans la dernière colonne des tableaux n° XII et XIII montre que ces rapports diminuent, pour une même pente des talus, quand les charges augmentent, et, pour une charge déterminée quelconque, à mesure que les talus s'inclinent à l'horizon, résultats qui, tous deux, viennent à l'appui de l'explication que nous avons donnée de la nécessité d'appliquer des coefficients numériques à notre formule dans le cas des canaux à talus. De cette explication et de la grandeur de ces coefficients, il ressort aussi que, dans ce cas encore, la formule proposée tient compte des éléments principaux de l'écoulement, de tous ceux auxquels il est possible d'appliquer directement le calcul.

Applications pratiques. — L'évasement des sections d'amont de la veine, cette espèce de dilatation géométrique qui exige des coefficients de correction, introduit dans les calculs un élément variable avec le degré d'accroissement des largeurs à partir du fond du courant; mais il est facile de voir qu'on sera généralement dispensé d'en tenir compte dans les cas ordinaires de la pratique. En effet, dans les expériences du tableau n° XIII, ce degré d'accroissement avait été porté à sa limite supérieure, puisque la largeur du fond était nulle, et les talus à l'inclinaison naturelle des terres. Or, si, déjà dans ce cas extrême, et pour la charge de 0^m,200, le coefficient atteignait la valeur 0,84, on peut certainement admettre que, pour les canaux ordinaires dont la largeur, au fond, est d'environ cinq fois la profondeur, et, à plus forte raison, pour les rivières, ce coefficient devient inutile. Enfin on peut s'en affranchir tout à fait en recoupant les talus sur une longueur de 3 mètres en amont et de 1 mètre en aval du barrage, et soutenant les terres avec quelques planches; car on rentrera ainsi dans le cas des canaux rectangulaires. Quant aux petits canaux en bois qui se rencontrent dans quelques localités, les coefficients qu'il convient de leur appliquer sont ceux du tableau n° XII.

Observation relative aux jaugeages effectués antérieurement dans des

canaux étroits à section trapézoïdale. — Dans le cas où ces jaugeages auraient été faits au moyen d'un déversoir sans contraction latérale, et en appliquant à la formule ancienne $Q = LH \sqrt{2gH}$ les coefficients jusqu'alors usités, on aurait admis une évaluation de la dépense d'eau trop faible par une double raison. Le tableau suivant contient les coefficients qui conviendraient aux deux cas de nos expériences :

TABLEAU N° XIV.

| CHARGES H | COEFFICIENTS DE L'ANCIENNE FORMULE | | OBSERVATIONS. |
|--------------|---|--|---------------------------|
| | pour des talus à $\frac{2}{1}$ environ. | pour des talus à terre coulante. | |
| 70 | " | 0,470 | Nappes libres. |
| 80 | " | 0,502 | <i>Idem.</i> |
| 90 | " | 0,523 | <i>Idem.</i> |
| 100 | 0,467 | 0,536 | <i>Idem.</i> |
| 110 | 0,480 | 0,545 | <i>Idem.</i> |
| 120 | 0,496 | 0,568 | Nappes noyées en dessous. |
| 130 | 0,508 | 0,571 | <i>Idem.</i> |
| 140 | 0,518 | 0,572 | <i>Idem.</i> |
| 150 | 0,527 | 0,571 | <i>Idem.</i> |
| 160 | 0,533 | 0,569 | <i>Idem.</i> |
| 170 | 0,536 | 0,565 | <i>Idem.</i> |
| 180 | 0,537 | 0,559 | <i>Idem.</i> |
| 200 | 0,538 | 0,547 | <i>Idem.</i> |
| 250 | 0,539 | " | <i>Idem.</i> |
| 300 | 0,540 | " | <i>Idem.</i> |

BARRAGES NOYÉS.

Les expériences concernant cette question, ainsi que toutes celles qu'il nous reste à rapporter, ont été faites dans le canal rectangulaire. A 7^m,70 du barrage d'expériences et dans la portion élargie du canal, on a établi, pour faire gonfler les eaux d'aval, un barrage dont on variait à volonté la hauteur : le volume liquide débité par le premier s'écoulait, tantôt en

déversoir par-dessus l'obstacle, tantôt par une fente verticale, orifice que nous nommerons *du troisième genre*, et sur la dépense duquel nous voulions obtenir quelques données expérimentales. Dans l'un comme dans l'autre cas, le plan moyen de la surface fluide, à une faible distance en amont de l'obstacle, devenait à peu près parallèle au fond du canal, mais cette surface était généralement ondulée. Entre ce point, où le remous était à sa plus grande hauteur, et le barrage d'expériences, il se produisait des phénomènes variés : d'abord le courant tombant de ce barrage suffisait pour refouler le remous et dégager la nappe, de sorte que, ni la forme de celle-ci, ni la dépense de l'orifice ne subissaient d'altération (*) : nous citerons une expérience avec nappe noyée en dessous, dans laquelle la charge H , sur le seuil du déversoir, étant $0^m,195$, le courant formé en aval refoulait le remous jusqu'à 3 mètres du barrage. La hauteur de ce remous était de $0^m,245$ à $0^m,250$, et les eaux d'aval s'écoulaient en déversoir. La partie inférieure de la nappe du premier barrage était raccordée avec la surface supérieure du remous par une surface d'abord concave, puis sensiblement parallèle au fond du canal, puis en contre-pente à peu près plane, et enfin présentant un talus courbe. La section où les filets étaient parallèles avait pour hauteur $0^m,09$, et pour largeur $0^m,900$; le volume liquide écoulé par seconde était d'ailleurs $0^{mc},17898$.

L'influence du remous sur la dépense ne commençait réellement à se faire sentir que quand il s'élevait jusqu'à $0^m,15$ environ en dessous du plan horizontal passant par le sommet de la nappe du déversoir. La *fig. 17* représente le profil des surfaces liquides pour cet état du système hydraulique. En augmentant un peu l'obstacle d'aval, on faisait naître, entre la nappe et le point culminant du remous, une série d'ondulations très-saillantes, suivies d'une surface en contre-pente et couronnées par une petite vague repliée sur elle-même (*fig. 19*). L'obstacle au dégagement des eaux d'aval s'accroissant encore, ces ondulations disparaissent, la partie supérieure du remous se rapproche progressivement, et fait retomber sur la nappe, de plus en plus altérée dans

(*) Cette indépendance remarquable entre deux masses liquides en mouvement et formant un courant continu pourrait s'expliquer, comme le phénomène des tubes hydrostatiques, par les pressions dues à la courbure de leurs surfaces et aux attractions réciproques des particules rangées sur un même filet courbe.

sa forme, de petites vagues qui s'y brisent (*fig.* 18). Il semble que le talus courbe qui soutient le gonflement s'écroule, en quelque sorte, périodiquement vers l'amont. Enfin, dans un dernier état des phénomènes, le bief d'aval présente une surface unie et tranquille, et la courbure de la nappe du déversoir reste à peine sensible (*fig.* 20 et 21).

C'est la limite à laquelle nous sommes arrêté. Dans ce dernier cas, les charges et les épaisseurs de la nappe liquide ont été obtenues par nivellement; mais le tube hydrostatique est resté immergé contre la face d'amont du barrage.

La hauteur S de ce barrage était $0^m,327$; sa largeur L , réduite de $0^m,021$ pour tenir compte de la partie interceptée par le tube, était $0^m,877$. Les expériences ont été exécutées du 1^{er} au 5 septembre 1847.

Afin de donner une idée des modifications de courbure que subissait la nappe du déversoir, nous avons inscrit, dans le tableau suivant, en regard des valeurs du rapport $\frac{e}{H}$, qui avaient effectivement lieu, celles qu'aurait prises ce rapport si l'écoulement eût été libre et sous les mêmes charges, la nappe n'étant pas détachée du barrage.

BARRAGES NOYÉS PAR UN GONFLEMENT DES EAUX D'AVANT.

TABLEAU N° XV.

| H | e | VALEUR du rapport $\frac{e}{H} = k$ effective. | | J | t | D | VALEUR du facteur $\sqrt{1-k}$ calculée = $\frac{D}{N}$ effective. | | RAPPORT de ces deux valeurs. | COEFFICIENT de l'ancienne formule. | ÉTAT DES NAPPES. |
|--|-------|--|--------------------------------|-------|-------|--------|--|--------|---------------------------------------|---|---|
| | | | pour l'écoulement libre. | | | | | | | | |
| 227 | 193,0 | 0,850 | 0,823 | 1,040 | 103,5 | 180,89 | 0,393 | 0,387 | 1,015 | 0,431 | La courbure de la nappe se roidit (fig. 17). |
| 195 | 171,0 | 0,877 | 0,814 | 1,009 | 156,0 | 116,44 | 0,322 | 0,351 | 0,917 | 0,348 | Il se produit une série d'ondulations entre la nappe et le remous (fig. 19). |
| 165 | 139,0 | 0,844 | 0,802 | 977,5 | 151,0 | 116,54 | 0,420 | 0,395 | 1,063 | 0,448 | Le remous se rapproche et sa hauteur relative augmente; les ondulations ont cessé (fig. 18). |
| 184 | 160,0 | 0,870 | 0,810 | 1,034 | 165,0 | 112,81 | 0,342 | 0,360 | 0,950 | 0,368 | |
| 128 | 108,0 | 0,842 | 0,787 | 986 | 243,0 | 73,05 | 0,392 | 0,397 | 0,987 | 0,411 | Idem. |
| 164 | 138,5 | 0,844 | 0,801 | 936 | 146,0 | 115,40 | 0,421 | 0,395 | 1,065 | 0,447 | Idem. |
| <i>État extrême des nappes..... courbure peu sensible.</i> | | | | | | | | | | | |
| 162 | 156,0 | 0,963 | 0,800 | 966 | 343,0 | 50,756 | 0,1893 | 0,1923 | 0,984 | 0,200 | La surface liquide est devenue unie et brillante (fig. 20). |
| 228 | 224,0 | 0,982 | 0,824 | 1,000 | 278,0 | 64,655 | 0,1397 | 0,1326 | 1,053 | 0,153 | La courbure du courant est à peine sensible (fig. 21). |
| | | | | | | | MOYENNE..... | | 1,004 | | |

Nous observerons que le volume d'eau dépensé par le déversoir, avant de se rendre dans le bassin de jauge, franchissait un orifice dont l'écoulement était nécessairement soumis à une sorte de périodicité par suite des fluctuations que le choc de la veine liquide imprimait, dans les six premières expériences, à la masse d'eau située entre ce courant et le débouché d'aval, circonstance à laquelle sont dues, très-probablement, les différences que l'on remarquera entre les rapports contenus dans la dernière colonne de ce tableau. Mais l'ensemble de ces rapports montre que l'on peut calculer la dépense des barrages noyés, par la nouvelle formule et au moyen des mêmes observations que dans le cas des déversoirs versant librement l'eau dans le canal de fuite, et pour les nappes non isolées du barrage.

Quant à l'ancienne formule employée pour calculer le débit des déversoirs, il suffit de voir les variations considérables et irrégulières de ses coefficients pour reconnaître qu'elle ne serait d'aucun usage dans la pratique pour le cas des barrages noyés.

BARRAGES OBLIQUES ET BARRAGES EN CHEVRONS.

L'établissement d'un barrage transversal pouvant donner lieu, en amont, à une surélévation du niveau du cours d'eau, nuisible aux riverains, on sera quelquefois obligé de débiter le volume à jaugeer en diminuant, le plus possible, la charge sur le seuil du déversoir, c'est-à-dire en augmentant la longueur de celui-ci. Le but pourra être atteint, soit au moyen d'un barrage oblique à la direction du courant, soit par la réunion de deux barrages obliques, formant une ligne brisée; et qu'on nomme *barrage en chevrons*; constructions bien connues dans le service de la navigation des rivières (*).

M. Mary a fait, sur ce genre de déversoirs, quelques observations dont les résultats tendent à montrer que la dépense d'un barrage en chevrons est la même que celle d'un barrage oblique de même étendue, établi dans le même canal, et que le débit de ce dernier barrage augmente avec sa longueur correspondante à différents degrés d'obliquité (**).

(*) Voir le *Cours de Construction* de M. Minard (Paris, 1841).

(**) Voir le résumé lithographié du cours de navigation fait par M. Mary à l'École des Ponts et Chaussées (1842-1843).

Pour résoudre la question par des jaugeages directs, nous avons fait les trois séries d'expériences et d'observations suivantes :

1°. *Barrages obliques*. — En amont d'un barrage oblique, les filets liquides sont des lignes parallèles à la longueur du canal, jusqu'à une très-faible distance de la crête du barrage où ils se détournent pour prendre une nouvelle direction dépendante de leur vitesse et de l'obliquité de ce barrage. Cependant les particules fluides les plus voisines des rives du cours d'eau continuent à en suivre la direction, ce qui constitue à chaque extrémité du barrage un déversement particulier raccordé avec l'ensemble de la nappe par une surface courbe, qui est convexe dans l'angle aigu et concave dans l'angle obtus du côté d'amont. La gerbe liquide qui tombe de ce dernier angle se gonfle au moment d'atteindre le fond du bief d'aval, et se retourne vers le pied du barrage en s'élançant parallèlement à celui-ci; mouvements qui doivent devenir, dans le lit des cours d'eau, une cause énergique de destruction, et exiger des constructions défensives particulières, s'étendant le long du pied du barrage jusqu'à 3 mètres environ de la rive avec laquelle celui-ci fait un angle obtus du côté d'amont. Les expériences ont été exécutées sur deux barrages verticaux en madriers, avec seuil en biseau, et glacis à 45 degrés, conformément au type que nous avons adopté. La direction de l'un de ces barrages faisait, avec les parois du canal d'expériences, un angle de 45 degrés, c'est-à-dire que son inclinaison, sur ces parois, était, suivant le langage de la pratique, à $\frac{1}{1}$; celle du second était à 2 de hauteur sur 1 de base. Les expériences ont été exécutées (ainsi que celles relatives au barrage en chevrons, qui nous occuperont tout à l'heure), du 24 au 28 septembre 1847. Voyons d'abord comment variait ici le rapport $\frac{H}{e}$.

TABLEAU N° XVI.

| BARRAGES OBLIQUES | | | |
|---------------------------|---------------|---------------------------|---------------|
| à $\frac{1}{1}$. S = 434 | | à $\frac{2}{1}$. S = 458 | |
| H | $\frac{H}{e}$ | H | $\frac{H}{e}$ |
| 62,5 | 1,238 | 55,0 | 1,233 |
| " | " | 70,5 | 1,205 |
| 90,0 | 1,216 | 90,0 | 1,192 |
| 120,0 | 1,200 | 114,0 | 1,178 |
| " | " | 116,0 | 1,177 |
| 136,5 | 1,198 | 137,0 | 1,171 |
| 157,0 | 1,198 | " | " |
| 186,0 | 1,189 | " | " |

Ces observations se rapportent toutes au cas des nappes libres, ou détachées du barrage; en les comparant à celles qui ont été faites sur les barrages perpendiculaires au courant, et rapportées plus haut, on voit que, toutes choses étant égales d'ailleurs, le rapport $\frac{H}{e}$ est plus petit pour les barrages obliques à $\frac{1}{1}$ que pour les barrages normaux. Toutefois, la différence est assez faible pour qu'il soit permis d'admettre qu'elle serait négligeable dans le cas d'une obliquité inférieure à celle-ci. L'obliquité augmentant, le rapport $\frac{H}{e}$ diminue, mais lentement; car cette inclinaison croissant de $\frac{1}{1}$ à $\frac{2}{1}$, il varie seulement de $\frac{1}{45}$ environ.

Passons maintenant aux résultats des expériences de jaugeage, compris dans le tableau qui va suivre. Nous observerons d'abord que, en vertu des phénomènes particuliers de mouvement produits par l'obliquité des barrages, phénomènes dont on ne saurait tenir compte par le calcul, la dépense par mètre courant de la longueur de ces barrages ne peut être la même que pour ceux dont la direction est perpendiculaire au cours d'eau. Ainsi, nous déduirons simplement des résultats d'expérience la valeur du facteur $\sqrt{1-k}$, qui convient à ces nouveaux cas. Secondement, nous devons prévenir que, dans toutes les expériences, la nappe

liquide était détachée du barrage. Enfin, le tube indicateur des charges étant resté en permanence contre la face d'amont du barrage, il y a lieu de faire la correction ordinaire sur la largeur totale de celui-ci.

BARRAGES OBLIQUES ; NAPPES LIBRES.

TABLEAU N° XVII.

| H | J | t | D | $\frac{D}{N}$ ou $\sqrt{1-k}$ |
|--|--------|-------|---------|-------------------------------|
| Obliquité $\frac{1}{4}$ $S = 434$ $L = 1,284 - 2i = 1,263$ | | | | |
| 62,5 | 1,035 | 539,0 | 34,568 | 0,393 |
| 89,7 | 974 | 292,0 | 60,048 | 0,394 |
| 120,0 | 1,012 | 196,0 | 92,949 | 0,390 |
| 136,0 | 1,026 | 163,0 | 113,313 | 0,392 |
| 157,0 | 1,019 | 131,0 | 140,031 | 0,392 |
| 186,0 | 1,020 | 101,0 | 181,802 | 0,387 |
| MOYENNE..... | | | | 0,391 |
| Obliquité $\frac{2}{4}$ $S = 458$ $L = 2,017 - 2i = 1,996$ | | | | |
| 55,0 | 1,0745 | 446,0 | 43,370 | 0,378 |
| 70,5 | 1,044 | 300,0 | 62,647 | 0,375 |
| 89,7 | 1,012 | 200,0 | 91,090 | 0,377 |
| 114,0 | 960 | 131,0 | 131,923 | 0,380 |
| 137,0 | 1,027 | 106,5 | 173,597 | 0,377 |
| 152,5 | 1,004 | 87,0 | 207,747 | 0,382 |
| MOYENNE..... | | | | 0,378 |

Le facteur $\sqrt{1-k}$ de notre nouvelle formule est évidemment constant dans chaque série, comme pour les barrages perpendiculaires au courant, et le même cas des nappes libres. Ce facteur diminue quand l'obliquité augmente, mais si faiblement, qu'on pourrait en adopter la valeur moyenne 0,385 pour toutes les obliquités qui se présentent dans les applications pratiques. Enfin, on voit que la dépense par mètre courant de la longueur d'un barrage oblique n'est pas égale à celle du barrage normal, comme on le

pense généralement ; mais qu'elle est plus faible moyennement dans le rapport de 385 à 417, ou de 1 à 1,083.

2°. *Barrage en chevrons.* — Le barrage était vertical et à biseau sur toute son étendue, selon le type général adopté ; ses ailes *ac* et *bd* (*fig. 22*) faisaient un angle de 45 degrés avec les parois du canal. Comme, dans toute construction de ce genre, quand elle est permanente, on ne doit point admettre d'arête verticale saillante exposée au choc du courant, les deux ailes *ac* et *bd* ont été raccordées par un arrondissement circulaire *aob*. Outre les mouvements particuliers qui ont lieu aux extrémités des barrages obliques, il se produit, au saillant d'un barrage en chevron, par suite de la rencontre des filets convergents, un gonflement, une sorte de crête liquide à section arrondie et croissante de haut en bas. Il est certain que l'on ne saurait à priori assigner à l'influence de ces phénomènes sa valeur exacte, mais il paraît probable qu'elle pourra se traduire par une diminution dans la longueur libre du barrage. Désignant donc par *x* la quantité qu'il convient de substituer pour *L* dans la formule générale

$$D = \sqrt{1-k} \cdot LH \sqrt{2g \frac{H}{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{S}{H}} \right)^2}} = \sqrt{1-k} \cdot x \cdot M,$$

nous chercherons d'abord la valeur de

$$x \sqrt{1-k} = \frac{D}{M}.$$

Dans ces expériences, la nappe était constamment détachée du barrage ; la hauteur *S* de celui-ci était 0^m,433 ; la longueur des ailes, mesurée sur les arêtes vives *ac*, *bd* du seuil du déversoir, était de 0^m,633 ; le tube indicateur des charges est resté immergé contre le plan d'amont d'une de ses ailes, et fournissait, dans toute la longueur du barrage, jusqu'à une très-faible distance des parois du canal, les mêmes hauteurs de colonne hydrostatique ; mais l'épaisseur *e* de la nappe était un peu plus forte au-dessus de l'arrondissement *aob* que dans les autres points, où elle était constante, à l'exception toutefois des deux extrémités *c* et *d*, contiguës aux parois du canal. La

comparaison des valeurs de e et de H a donné les résultats suivants :

| | | | | |
|---------------------|-------|-------|-------|--------|
| H | 87,7 | 115 | 141 | 165, |
| $\frac{H}{e}$ | 1,221 | 1,204 | 1,204 | 1,204. |

La valeur du rapport $\frac{H}{e}$ est donc un peu plus grande pour un barrage en chevrons que pour un barrage droit, de même hauteur et de même obliquité, et varie d'ailleurs très-peu avec la charge H .

Passons aux conséquences du jaugeage expérimental.

BARRAGE EN CHEVRONS; NAPPES LIBRES.

TABLEAU N° XVIII.

| H | J | t | D | $x\sqrt{1-k}$ |
|--------------|--------|-------|---------|---------------|
| 87,7 | 974 | 300,0 | 58,446 | 0,501076 |
| 115,0 | 1,043 | 213,0 | 88,151 | 0,498104 |
| 141,0 | 1,052 | 157,0 | 120,625 | 0,498542 |
| 165,0 | 1,0515 | 122,5 | 154,450 | 0,50000 |
| MOYENNE..... | | | | 0,499431 |

La quantité $x\sqrt{1-k}$ est indépendante de H , et, par suite, il en doit être ainsi du facteur $\sqrt{1-k}$, que nous avons trouvé constant dans tous les cas examinés jusqu'ici, des nappes libres et des canaux rectangulaires; il est, de plus, à peu près certain que la valeur de ce facteur est la même que pour le barrage oblique de même inclinaison, au moins en ce qui concerne l'écoulement par-dessus les ailes ac , bd de celui qui nous occupe; de sorte que la question se réduit à l'appréciation de l'influence des mouvements de convergence qui ont lieu sur l'arrondissement aob . Or, en divisant la quantité moyenne 0,499431 par la valeur 0,391 de $\sqrt{1-k}$, trouvée tout à l'heure pour le barrage oblique à $\frac{1}{1}$, on obtient la longueur $x = 1^m,277$; d'un autre côté, la somme des longueurs des ailes est $1^m,266$, qui, diminuée de $0^m,021$ pour la correction ordinaire relative à la partie interceptée par le tube, se réduit

à $1^m,245$. Cela posé, remarquons que les filets liquides se présentaient normalement à la corde $ab = 0^m,065$ de l'arrondissement : donc, sans les effets de la convergence des filets dans l'angle saillant, il faudrait ajouter la longueur $0^m,065$ de cette corde à celle des ailes ; par suite des mêmes effets, c'est une fraction seulement de cette longueur qu'il faut ajouter pour tenir compte de la quantité d'eau qui passe au saillant du chevron. Quelle est cette fraction ? La longueur totale d'écoulement libre trouvée par le calcul est

$$1^m,277 = 1^m,245 + 0^m,032 = (ac + bd - 0^m,021) + \frac{1}{2}ab;$$

d'où résulte cette règle pratique :

Le volume liquide débité par un barrage en chevrons est égal à celui qui passerait dans le même temps par-dessus un barrage droit de même obliquité par rapport au courant d'amont et dont la longueur serait égale à la somme de celles des ailes du chevron augmentée de la moitié de la corde de l'arrondissement au saillant ()*.

BARRAGES ÉTABLIS DANS UNE PORTION DE CANAL DONT LA LARGEUR EST VARIABLE.

Pour soumettre à une dernière épreuve les moyens d'observation et de calcul proposés, j'ai fait établir, dans la portion à parois divergentes NMPQ (*fig. 2*) du canal d'expériences, un barrage vertical perpendiculaire à l'axe de longueur de ce canal, et présentant la forme-type adoptée jusqu'ici.

Ce barrage avait une largeur de $1^m,196$, qui, diminuée de la quantité constante $0^m,021$, pour tenir compte de la présence du tube hydrostatique, donnait $L = 1^m,175$; la hauteur de sa crête, au-dessus du fond du canal, était $0^m,453$. Le tableau suivant contient les résultats observés et ceux du calcul. Les expériences ont été exécutées le 1^{er} octobre 1847.

(*) Dans le cas où cette corde serait oblique à l'axe du canal, il faudrait la remplacer par sa projection perpendiculaire à cet axe.

BARRAGE DANS UN CANAL DE LARGEUR VARIABLE; NAPPES LIBRES.

TABLEAU N° XIX.

| H | e | $\frac{H}{e}$ | J | i | D | VALEURS DE $\sqrt{1-k}$, résultant | |
|---------------|-------|---------------|------|-------|--------------------------|--|-------------------|
| | | | | | | du calcul. | de l'observation. |
| 89,2 | 73,8 | 1,201 | 961 | 301,0 | 57,475 ^{litres} | 0,4090 | 0,4154 |
| 127,0 | 105,5 | 1,205 | 1020 | 185,0 | 99,254 | 0,4114 | |
| 127,0 | 105,5 | 1,205 | 1016 | 184,0 | 99,402 | 0,4120 | |
| MOYENNE | | | | | | 0,4117 | 0,4115 |
| 160,0 | 132,3 | 1,209 | 1007 | 126,5 | 143,305 | 0,4154 | 0,4158 |

La première valeur du facteur $\sqrt{1-k}$, calculée par la formule

$$\sqrt{1-k} = \frac{D}{1,49 H \sqrt{2g \frac{H}{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{S}{H}}\right)^2}}},$$

ne diffère que de $\frac{1}{100}$ de celle qui résulte de l'observation de H et de e, différence qui, d'ailleurs, peut provenir d'une légère erreur dans ces observations. Quant aux autres, on voit que les résultats du calcul s'accordent parfaitement avec ceux de l'expérience. Pour se rendre compte d'une précision aussi remarquable et plus grande que celle qui a été obtenue en appliquant la même formule au cas des nappes libres dans le canal à parois parallèles, il faut se reporter à ce que nous avons dit des mouvements de déviation des particules liquides qui affluent du fond du canal : ces mouvements résultent d'une tendance que les faisceaux de filets, arrivant vers les angles du déversoir, ont à s'épanouir transversalement, et interviennent comme une cause perturbatrice, très-faible, il est vrai, mais sensible. Or, ici, l'épanouissement de la nappe se faisait graduellement, par l'élargissement progressif du canal.

Ainsi se trouvent confirmées, non-seulement l'importance pratique de la

formule et des moyens d'observation proposés, mais, en outre, les considérations que nous avons présentées sur l'influence de certains phénomènes accessoires que l'analyse ne peut encore représenter. Toutes les questions de l'Hydraulique, lorsqu'on les étudie au point de vue de la réalité physique, présentent des faits analogues qu'il faudra, pendant longtemps peut-être, observer, puis classer logiquement, avant de pouvoir établir la science sur ses véritables bases.

SECONDE PARTIE.

JAUGEAGE DES COURS D'EAU

A FAIBLE OU A MOYENNE SECTION.

ORIFICES AVEC CHARGE SUR LE SOMMET (*).

Quelque simples que soient, en général, les opérations auxquelles donne lieu le jaugeage des courants liquides à section peu étendue par la méthode des déversoirs sans contraction latérale, dont nous avons posé les bases dans la première partie de ce Mémoire, il peut se présenter des cas (celui des canaux d'irrigation par exemple) où l'on trouve plus facile d'employer un barrage laissant couler l'eau en dessous. La connaissance des lois de ce genre d'écoulement est, en outre, importante pour la pratique des usines, qui en offre de fréquents exemples : enfin, au point de vue physique, il est intéressant de considérer le phénomène des veines liquides dans les circonstances les plus élémentaires de leur formation, étude dont nous avons déjà déduit quelques conséquences utiles pour le cas inverse des nappes déversées.

1. Ces expériences ont été exécutées dans l'observatoire hydraulique précédemment décrit. On a établi successivement, dans le canal de 70 mètres de

(*) Les recherches expérimentales qui font l'objet de cette partie ont été, comme les précédentes, honorées de l'approbation de l'Académie des Sciences (voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXVIII).

longueur, deux barrages verticaux en planches, laissant entre eux et le fond du canal un intervalle occupé par une vanne qui permettait de faire varier la hauteur de l'orifice. Le premier de ces barrages avait, ainsi que les orifices correspondants, $0^m,900$ de largeur; le second était placé à l'extrémité d'aval du canal d'expériences, qui présentait une largeur de $1^m,638$ en cet endroit, où il forme un bief à parois verticales sensiblement parallèles, relié au précédent par un raccordement de $3^m,80$ de longueur (*fig. 2*); le seuil et les côtés verticaux des orifices laissés en dessous de ce dernier barrage étaient prolongés, jusqu'à $0^m,17$ en aval, par des planchettes très-minces en saillie, raccordées sans aucun ressaut avec le fond et les parois latérales du canal, de sorte qu'il n'en résultait point de contraction: ce dispositif était nécessaire pour la mise en communication du canal d'expériences avec le bassin de jauge; il réduisait la largeur de la veine à $1^m,606$.

Les charges ont été relevées directement à une assez grande distance en amont des barrages, pour que l'observation n'en fût pas troublée par les mouvements superficiels de remous auxquels l'écoulement donne lieu.

Les moyens de jaugeage direct étaient ceux que nous avons décrits précédemment. Dans les expériences qui sont l'objet de cette seconde partie, on a considéré les cas suivants :

1°. Orifice sans contraction sur le seuil, la veine s'écoulant librement dans le canal de fuite prolongé jusqu'à $1^m,50$ en aval;

2°. Mêmes circonstances, mais le seuil de l'orifice étant prolongé seulement à $0^m,17$ en aval, c'est-à-dire jusqu'au point où les vitesses de translation des particules liquides devenaient sensiblement parallèles;

3°. Même orifice qu'au n° 1, la veine étant gênée par un barrage placé à 10 mètres en aval;

4°. Orifice avec contraction sur le seuil et veine libre;

5°. Même orifice, la veine étant modifiée par l'influence d'une vanne de fond, placée à 3 mètres en aval.

Ainsi que nous nous en sommes fait une loi dans tous nos travaux, nous commencerons par l'examen des propriétés physiques observées dans ces différents cas du mouvement des courants liquides.

CHAPITRE PREMIER.

DONNÉES NATURELLES.

2. Orifices sans contraction sur le seuil, la veine coulant librement dans un long canal de même largeur. — Lorsque l'orifice est placé sur le fond d'un canal de même largeur, les particules liquides, arrivées à une distance DE (fig. 23) de cet orifice, croissante avec la charge, prennent brusquement une accélération rapide pour se précipiter vers la section d'écoulement CE; le profil de la surface supérieure CAF de la veine se compose d'une courbe concave CAB, qui se raccorde par une longue ligne en contre-pente BF avec un gonflement suivi de quelques ondulations peu prononcées; à une distance EG de l'orifice, croissante avec la charge, les filets ou routes moyennes des particules liquides deviennent, pour un instant, parallèles, d'où il résulte une section contractée AG; cette contraction a lieu uniformément sur la largeur de la veine jusqu'à une distance de quelques millimètres des parois du canal de fuite, contre lesquelles il se produit un gonflement *bac*, phénomène analogue à celui du *renversement* des veines issues d'orifices non circulaires en minces parois. Ainsi la contraction qui a lieu dans un sens est encore ici accompagnée d'une dilatation, trop faible toutefois, et occupant une portion beaucoup trop restreinte de la section AG pour que l'aire de cette section de la veine ne soit pas plus petite que celle de toutes les autres. Ayant relevé les épaisseurs minima AG, pour différentes charges, nous appellerons *coefficient de la contraction géométrique* le rapport $\frac{AG}{CE}$ de ces épaisseurs aux levées de vanne; le tableau suivant contient les résultats de ces observations. Les dimensions y sont exprimées en millimètres.

TABLEAU N° XX.

| NUMÉROS d'ordre. | LEVÉE de vanne. | CHARGE sur le sommet de l'orifice. | HAUTEUR de la section contractée. | COEFFICIENT de la contraction géométrique |
|---------------------|--------------------|--|---|---|
| 1 | 99,7 | 530,0 | 59,0 | 0,592 |
| 2 | 99,4 | 265,6 | 58,3 | 0,586 |
| 3 | 99,4 | 61,6 | 57,0 | 0,574 |
| 4 | 99,4 | 56,1 | 57,0 | 0,574 |
| 5 | 99,4 | 44,1 | 57,4 | 0,577 |
| 6 | 48,5 | 566,5 | 30,0 | 0,618 |
| 7 | 48,5 | 454,5 | 29,0 | 0,598 |
| 8 | 48,5 | 312,5 | 27,9 | 0,575 |
| 9 | 48,5 | 148,0 | 27,0 | 0,557 |

Conséquences des résultats précédents. — Dans ces observations, la levée de vanne a varié de 1 à 2,05, et les charges sur le sommet de 1 à 12,3; il résulte de leur ensemble que le coefficient de la contraction géométrique varie, quoique faiblement, avec la levée de vanne, et qu'il dépend surtout de la charge sur le sommet : celle-ci augmentant à partir de zéro, le rapport précité diminue d'abord, atteint bientôt un minimum, puis augmente avec elle. Ces variations peuvent s'expliquer en considérant, d'abord, que la courbure *cfb* des premiers éléments de la veine, nulle quand la charge sur le sommet l'est aussi, augmentant avec cette charge, présente à la chute des molécules une pente plus rapide et tend à leur faire prendre une plus grande accélération de vitesse; mais cet effet est très-limité, car, à partir d'une charge sur le sommet, qui doit peu différer de la hauteur de levée de vanne, les molécules qui tombent en C et celles qui arrivent horizontalement à l'orifice sont animées de vitesses à peu près égales, de sorte que l'angle de départ de la surface supérieure de la veine reste à peu près constant; de plus, la résistance des parois augmentant avec le carré de la vitesse, c'est-à-dire avec la charge, intervient encore pour limiter l'accélération et, par suite, l'amincissement de la veine. D'un autre côté, le débit du courant augmentant avec la charge, sans que la pente ni la largeur du canal de fuite s'accroissent, il en résulte nécessairement, à une certaine distance en aval, un gonflement plus considérable et une réaction plus efficace sur la veine.

Si le canal de fuite était suffisamment prolongé, la saillie de ce gonflement, ajoutée à la hauteur due à la vitesse moyenne des molécules dans sa section, représenterait la charge initiale ou tête d'eau nécessaire pour engendrer la vitesse du régime uniforme, correspondant à la dépense de liquide, ainsi qu'à la pente du canal d'aval : de sorte que, si cette pente était assez rapide pour que la vitesse moyenne du régime uniforme fût celle qui a lieu dans la section contractée, le canal de fuite, à partir de la section AG, n'exercerait plus aucune influence sur l'écoulement, et la grandeur relative de la contraction serait à très-peu près indépendante de la charge sur l'orifice, à partir d'une faible valeur de cette charge. Dans les coursiers courts et horizontaux ou peu inclinés, le courant d'aval se gonfle progressivement jusqu'à ce qu'il ait atteint une hauteur égale à la charge nécessaire pour produire l'écoulement de tout le volume débité par une sorte de déversoir.

3. *Coefficient de la contraction géométrique, la veine étant gênée par un barrage.* — Avec la levée de vanne de 0^m,0997, lorsque le courant d'aval était gêné par un barrage produisant un remous qui retombait sur la veine jusqu'à 0^m,40 de l'orifice, c'est-à-dire vers l'endroit de la section contractée, la valeur du coefficient de la contraction géométrique a été trouvée égale à 0,602 pour une charge de 0^m,420 sur le sommet de l'orifice. Pour la même charge et la veine libre, ce coefficient eût été 0,591 ; rapport, 1,019.

4. *Cas où la veine tombe librement dans l'atmosphère après avoir pris le parallélisme qui caractérise la section contractée.* — Les conditions du phénomène sont changées quand le canal de fuite n'est prolongé que de la quantité nécessaire pour faire acquérir à la surface supérieure de la veine une direction parallèle à celle de sa face inférieure. Dans ce cas, ainsi que le fait prévoir l'explication précédente, le coefficient de la contraction géométrique, à partir d'une très-petite valeur de la charge, en est sensiblement indépendant, résultat analogue à celui que M. Poncelet a obtenu pour les vannages de sa roue verticale à aubes courbes suivis de coursiers courts, inclinés à $\frac{1}{9}$ ou à $\frac{1}{10}$ en dessous de l'horizon, et terminés par un arc de cylindre circulaire aboutissant à un ressaut brusque (*). Pour le vannage vertical de 1^m,638 de largeur, avec lequel nous avons opéré et des levées de

(*) *Expériences sur les roues hydrauliques à aubes courbes*; Metz, 1827.

vanne comprises entre $0^m,02$ et $0^m,05$, la valeur du coefficient de la contraction géométrique était, en moyenne, $0,66$.

5. *Observations relatives aux trajectoires paraboliques de la veine.* —

Nous ne quitterons pas le sujet des veines tombant librement dans l'atmosphère, avant d'avoir rapporté les résultats de plusieurs observations sur la forme de leur trajectoire. Ces observations ont été faites avant que l'extrémité du canal d'expériences fût disposée pour les jaugeages : on a relevé le profil de la nappe supérieure au moyen d'une règle verticale ab (*fig. 24*) munie d'une pointe en cuivre, par rapport à l'arête supérieure d'une autre règle mn maintenue horizontalement, et sur laquelle était posé un niveau à bulle d'air. Dans une première série d'observations, le fond du canal était prolongé en aval de l'orifice d'une quantité $DE = 0^m,17$; on a ensuite scié ce prolongement en kk' à l'aplomb du vannage, pour obtenir une veine entièrement libre.

Dans le premier cas, en plaçant l'origine des coordonnées horizontales et verticales de la trajectoire au point A , où la surface supérieure de la veine est sensiblement horizontale, on peut représenter la partie AFG de cette trajectoire dans une étendue assez grande, par l'équation connue

$$y = \frac{1}{4h} x^2.$$

On savait déjà, par quelques observations de Bossut et de Michelotti, sur l'amplitude du jet, que la quantité h , dans cette équation, est inférieure à la charge sur le centre de l'orifice, lorsque celui-ci est d'une faible ouverture. Les résultats inscrits dans le tableau suivant montrent, en outre, que, par les orifices rectangulaires, la différence entre ces deux quantités diminue à mesure que la levée de vanne augmente ; de telle sorte, qu'à partir d'une hauteur d'orifice de $0^m,06$, on pourra prendre pour h la charge sur le centre, quand même cette charge serait de beaucoup supérieure à celle de nos expériences, les observations de Michelotti montrant qu'elle n'influe que très-peu sur la différence dont il s'agit.

TABLEAU N° XXI.

| LEVÉE de vanne. | CHARGE sur le centre de l'orifice. | VALEUR de h . | DISTANCE AS. |
|--------------------|--|--------------------|-----------------|
| 20,0 | 351 | 245 | 167 |
| 30,3 | 471 | 384 | 157 |
| 30,3 | 252 | 223 | 157 |
| 50,8 | 447 | 442 | 125 |

Lorsque la veine est libre au sortir de l'orifice, la surface supérieure SA'F'G', d'abord concave, devient bientôt convexe; puis, à une certaine distance A'B du vannage, quand la nappe inférieure s'est suffisamment infléchie, la nappe supérieure prend un profil sensiblement parabolique, représenté, avec une approximation suffisante pour la pratique, par l'équation ordinaire de la trajectoire des projectiles dans le vide,

$$y = \frac{1}{4h \cos^2 \theta} x^2 + x \tan \theta,$$

θ étant l'angle à l'horizon de la tangente à la courbe en son origine A'. Pour les mêmes charges sur le centre de l'orifice, et les mêmes levées de vanne, la distance A'B et la quantité h ont à peu près les mêmes valeurs que dans le cas précédent, de sorte que les observations faites pour ce cas sur les variations de ces éléments s'appliquent encore ici.

Nouveaux résultats concernant les propriétés des colonnes hydrostatiques.

Ensemble de la question de la conservation des pressions dans les veines fluides.

Lorsque l'on plonge, de l'extérieur à l'intérieur, dans le plan d'un des orifices sans contraction latérale qui nous occupent, l'ouverture de la branche inférieure d'un tube recourbé, l'eau s'élève dans sa branche verticale à une hauteur sensiblement égale à celle du niveau d'amont, en exceptant toutefois le cas où cette ouverture arrive à quelques millimètres des côtés de l'orifice sur lesquels la contraction se produit: dans cette région,

les mouvements des filets exercent une influence perturbatrice qui occasionne une dépression dans la colonne hydrostatique. Les mêmes effets se produisent lorsque l'entrée du tube pénètre dans le bief alimentaire en amont de l'orifice. Enfin, dans les cas d'écoulement représentés par la *fig. 23*, si l'on retire graduellement le tube vers l'aval, le sommet de la colonne hydrostatique se maintient sensiblement à la hauteur du niveau d'amont jusqu'à ce que l'entrée inférieure du tube corresponde à la section AG où les filets sont parallèles et sans courbure; en ce moment, il se produit dans la même colonne des oscillations brusques et considérables, et, un peu plus loin, une dépression permanente.

Ayant ouvert, dans un barrage vertical fixé en travers du canal de 0^m,900 de largeur, un orifice rectangulaire en minces parois avec contraction sur les quatre côtés, qui donnait lieu à une veine tombant sur le fond du canal où elle s'épanouissait, j'y ai également plongé la branche inférieure d'un tube recourbé, en amont et en aval du plan de l'orifice. Il s'est produit dans la branche verticale de ce tube des effets analogues aux précédents, et les oscillations ainsi que la dépression très-sensible de la colonne hydrostatique avaient lieu quand l'entrée du tube correspondait à la section où achevait de s'accomplir le *renversement* de la veine, c'est-à-dire vers l'endroit du maximum de convergence des filets provenant des côtés de l'orifice. En outre, même quand le tube était plongé en amont de la section précitée, il s'y produisait encore une dépression dès qu'on l'approchait à quelques millimètres de la surface de la veine. Ces phénomènes sont évidemment du même ordre et sont dus aux mêmes causes que ceux que nous avons observés et décrits à l'occasion des nappes formées sur les déversoirs. La première observation de ce genre paraît être due à M. Lagerhjelm et a été rapportée par M. Poncelet (*) dans les termes suivants : « ... En plongeant verticalement, au-dessus d'un orifice circulaire pratiqué dans la face plane et horizontale d'un réservoir très-grand par rapport aux dimensions propres de cet orifice, un tube de verre ouvert par les deux bouts, et de

(*) *Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoulement de l'eau*, etc.; par MM. Poncelet et Lesbros, page 161. Ce passage est extrait de la savante discussion, faite par M. Poncelet, des résultats des expériences sur l'écoulement de l'eau, antérieures à l'année 1826.

manière que son extrémité inférieure se trouve située à une petite distance en deçà ou au delà du centre de l'orifice, on voit constamment le liquide s'élever verticalement dans le tube jusqu'auprès du niveau supérieur dans le vase, et se maintenir sensiblement à cette hauteur tant que l'extrémité inférieure dont il s'agit ne dépasse pas d'une quantité notable le bord intérieur de l'orifice.... »

F. Savart, dont les *Recherches sur la constitution et le choc des veines liquides* (*) resteront comme une des belles pages de la physique descriptive, a observé une série de phénomènes qui se rattachent à la même question, et dont nous citerons les plus importants relativement au sujet qui nous occupe. Deux réservoirs cylindriques verticaux dans lesquels, au commencement de chaque expérience, la surface supérieure du liquide se trouvait au même niveau, étaient armés chacun d'un orifice circulaire vertical dont le diamètre a varié; ces deux orifices étaient disposés parallèlement vis-à-vis l'un de l'autre, et leurs centres sur une même droite perpendiculaire à leur plan, de sorte que les veines qu'ils lançaient se choquaient directement, et leur rencontre donnait lieu à une nappe auréolée, par le contour de laquelle se produisait, en définitive, l'écoulement du liquide.

Lorsque les niveaux, dans les deux vases, sont entretenus constants et à la même hauteur, la dépense totale est égale à la somme des volumes liquides que peuvent verser les deux orifices dans un temps donné. La nappe est plane, si les orifices ont le même diamètre, et conoïde, ou ellipsoïde, dans le cas contraire, pourvu toutefois que le rapport des diamètres ne soit pas plus grand que 3. Il est facile de voir que, dans ce cas, la nappe ne joue pas d'autre rôle que celui d'une surface quelconque exposée au choc normal d'une veine, et qui, placée à une certaine distance de l'orifice, n'influe pas sur sa dépense. Mais, quand le niveau de l'un des deux réservoirs est seul entretenu constant, il se forme, contre le plan de l'orifice de l'autre vase, une nappe adhérente, et ce vase ne dépense rien. Résultat qui, dans le cas de l'inégalité des diamètres des orifices, ne se produit constamment que si le plus grand des deux est adapté au réservoir dont le niveau est entretenu constant. Lorsque le contraire a lieu, le phénomène se manifeste encore si

*) *Annales de Chimie et de Physique*, tomes LIII, LIV et LV.
XXXIII^e Cahier.

les diamètres ne diffèrent que du simple au double, et la nappe est un cône dont le sommet adhère à l'orifice du vase qui ne dépense pas. Pour une plus grande différence entre les grandeurs des orifices, ce dernier vase perd une certaine quantité d'eau, et le niveau s'y abaisse en oscillant jusqu'à ce qu'il ait atteint une certaine hauteur en dessous du niveau constant de l'autre réservoir.

Lorsque les deux réservoirs se vident, c'est-à-dire que ni l'un ni l'autre n'est alimenté, la durée de l'écoulement est la même pour tous deux, dans tous les cas. En outre, si les diamètres des orifices sont égaux, la pression hydrostatique est constamment la même sur ces orifices. Si ces diamètres sont inégaux, mais ne diffèrent pas plus que du simple au double, l'égalité des pressions statiques peut subsister encore, mais les niveaux sont dans un état d'équilibre instable, que la moindre agitation peut détruire. Lorsque cet équilibre est troublé, ou que la trop grande différence entre les diamètres des orifices d'écoulement ne permet pas qu'il s'établisse, le niveau du vase armé du plus grand orifice tombe par secousses au-dessous de celui de l'autre réservoir, et d'une quantité d'autant plus grande, que la différence des ouvertures est plus considérable.

Lorsque deux vases de même diamètre, armés d'orifices égaux, sont disposés de manière que le jet lancé par l'un puisse entrer par l'ouverture de l'autre, si l'un de ces réservoirs est vide, tandis que l'autre contient de l'eau à un niveau, soit constant, soit variable, la masse liquide se partage également entre eux, et le temps nécessaire pour que les deux niveaux arrivent à la même hauteur n'est que les deux tiers de celui qu'il faut pour obtenir le même résultat, lorsque les vases communiquent immédiatement par un orifice de même diamètre que celui qui lance la veine.

A ces différents faits concernant les pressions des veines et des nappes liquides, nous ajouterons le suivant, relatif aux fluides élastiques : M. Poncelet, analysant les résultats d'expériences exécutées sous sa direction dans les ateliers de M. Pecqueur, sur le mouvement de l'air dans des conduites alimentées par un grand récipient à pression constante, a reconnu que ces résultats étaient représentés par les formules relatives aux liquides qu'il a données dans ses Leçons à l'école de Metz; d'où il résulte qu'il ne se produisait point de détente notable dans la conduite, et que la

densité était maintenue jusqu'à l'instant... « où le fluide, parvenu à la section pour laquelle la contraction devient la plus forte, va s'épanouir ou se détendre par une sorte d'explosion.... (*) »

Ces résultats d'observation, déjà nombreux, et ceux qui pourront y être ajoutés par la suite, deviendront sans doute un jour, entre les mains des géomètres, les éléments d'importantes découvertes; et l'on ne saurait trop ardemment souhaiter de voir la puissance généralisatrice de l'analyse appliquée aux faits les mieux constatés de l'hydraulique, car c'est là, c'est dans les mouvements des fluides non élastiques, et à peu près exempts de viscosité, que l'on trouvera toujours les attractions moléculaires s'exerçant avec la plus grande indépendance d'influences étrangères. Dans l'état actuel de nos connaissances à cet égard, dans l'absence de principes spécialement applicables aux phénomènes dont il s'agit, toute explication serait prématurée. Mais nous voyons, en embrassant l'ensemble de ces phénomènes, que les veines fluides conservent les pressions statiques sous lesquelles elles ont été engendrées, jusqu'à ce que certaines modifications se soient produites dans leur courbure; nous voyons aussi qu'elles peuvent transmettre par leur choc ces pressions à d'autres masses fluides, soit en repos, soit en mouvement, à la condition toutefois de produire, contre ces masses, des nappes d'une certaine forme nécessaire pour que la transmission soit complète. Ainsi, la courbure de ces nappes minces, celle des veines issues des orifices à contours fermés, celle des nappes des déversoirs, est un fait inséparable de la conservation ou de la communication des pressions (**).

(*) *Note sur les expériences de M. Pecqueur, etc.; voir les Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, tome XXI (1845)*

(**) Quant aux causes, le champ des conjectures est illimité. On est naturellement porté, il est vrai, à assigner un rôle aux forces centrifuges dues aux mouvements des particules sur leurs trajectoires courbes, mais c'est seulement lorsque ces trajectoires tournent leur convexité vers l'intérieur de la masse. D'un autre côté, F. Savart admet d'une manière générale l'existence d'une force moléculaire attractive, produisant la rétractilité des nappes (*fig. 13*) résultant du choc d'une veine circulaire contre un disque; or le mécanisme des effets d'une telle force pourrait se concevoir en assimilant les groupes de molécules fluides, rangés le long des lignes de courbure des nappes, à des corps doués de pôles de noms contraires comme les aimants, et orientés de telle sorte que les droites, joignant ces centres d'attraction ou de répulsion d'un groupe à l'autre, fussent obliques aux éléments correspondants des mêmes lignes de courbure. On expliquerait même, par la rotation de ces groupes résultant

7. *Remous produits par un barrage d'aval.* — Après avoir rapporté les principaux phénomènes qui se manifestent dans le mouvement de la veine libre, nous considérerons ceux auxquels donnent lieu les obstacles qui forcent les eaux d'aval à se gonfler pour engendrer la vitesse qu'exige leur écoulement.

Dans les expériences sur les orifices sans contraction inférieure, l'obstacle était un barrage vertical placé à 10 mètres de ces orifices. En élevant progressivement, pour une même levée de vanne et une charge à peu près constante, le sommet de ce barrage, on produit, dans le courant qui suit l'orifice, trois états bien distincts : d'abord la force impulsive de la veine suffit pour refouler le remous jusqu'à plusieurs mètres en aval ; mais bientôt il se rapproche, et fait tomber sur la veine des vagues minces $aa'a''$ (*fig. 25*) qui l'envahissent peu à peu, et finissent par la couvrir entièrement jusqu'à l'orifice. La surface de ce remous est convexe, et aboutit à une section AB, où elle devient sensiblement parallèle au fond du canal ; un peu plus loin, elle se déprime pour engendrer la nappe d'écoulement par-dessus le barrage. Le troisième état du bief d'aval est celui dans lequel l'orifice est entièrement noyé ; la surface cde du remous présente une contre-pente peu prononcée jusqu'à la section, analogue à AB, où les filets liquides sont sensiblement parallèles. La première partie cd de cette surface est dans un état d'agitation qui paraît provenir de l'action de la veine sur la masse d'eau qui la noie. On trouvera, dans le chapitre II, les hauteurs du remous correspondantes à ces différentes circonstances.

8. *Orifice avec contraction sur le seuil ; remous produits par une vanne de fond qui diminue le débouché d'aval.* — Les phénomènes du remous ont pris un caractère remarquable, et plus varié encore, dans le cas où le seuil

de la différence des vitesses des couches des mêmes nappes, et par le changement de la plus grande partie des forces attractives en répulsions, le phénomène si remarquable du redressement de ces nappes, qui, après s'être tendues graduellement, renversent leur convexité supérieure, phénomène qui se présente souvent lorsque les vitesses de la veine sont très-faibles. Ces forces moléculaires étant admises, il résulterait de leur obliquité, par rapport aux lignes de courbure des couches fluides, des composantes normales, c'est-à-dire des pressions dirigées vers l'intérieur de la masse quand les courbures seraient concaves en même temps que les actions moléculaires seraient attractives, ou convexes en même temps que ces actions seraient répulsives.

de l'orifice était élevé au-dessus du radier du canal, et l'obstacle une vanne de fond placée à 4 mètres environ en aval.

1°. Cette vanne étant abaissée de manière à tremper de quelques centimètres dans le courant, l'eau venait, dans les premiers instants, refluer sur l'orifice d'écoulement et couvrir entièrement la veine; puis on voyait celle-ci changer progressivement de courbure, et enfin elle prenait la forme légèrement concave *abc* (*fig. 26*); en même temps, le remous qui la couvrait d'abord disparaissait, et il n'en restait plus que quelques vagues minces *kk'*..., qui retombaient, mais seulement jusqu'en *b*, de la partie supérieure *cd* du courant, sensiblement ondulée. Ces vagues présentaient, en plan, la courbure générale *k'kk''* (*fig. 27*), les bords en étaient couverts de petites lames brisées et leur intervalle était très-agité.

2°. Un abaissement un peu plus considérable de la vanne d'aval entraînait une modification remarquable dans les mouvements superficiels: la première partie *ab* (*fig. 28*) du courant devenait presque plane, inclinée environ à $\frac{1}{50}$; elle se raccordait avec un gonflement peu saillant *c*, suivi d'une dépression *d*; la surface liquide se relevait ensuite à 0^m, 10 environ au-dessus du gonflement *c*, pour former une vague *emn*, engendrant en aval d'autres vagues semblables, mais de moins en moins saillantes: du point culminant *e* de la première retombait un remous-tourbillon *i*.

En diminuant encore le débouché d'aval, on produisait, tout près de l'orifice, un gonflement considérable *abcd* (*fig. 29*), à surface parfaitement nette, polie et brillante; le pied *d* de cette intumescence était couvert par un remous *ed* d'où s'échappaient des lames brisées et bouillonnantes. La plus grande saillie qu'on ait pu obtenir, la charge sur le centre de l'orifice étant 0^m, 330, s'élevait jusqu'à 0^m, 117 en dessous du niveau d'amont; pour un rétrécissement plus grand de la section du débouché, l'orifice d'écoulement était noyé, la veine produisait des soubresauts continuels, et le bief d'aval présentait l'image d'un véritable chaos. Il s'en échappait, à la surface, un nombre considérable de gouttelettes ellipsoïdes de 0^m, 008 environ de diamètre moyen; enfin l'eau avait pris un aspect jaunâtre et huileux.

Ces divers phénomènes de mouvements résultaient de l'action de la veine issue de l'orifice d'écoulement, combinée avec la réaction de celle qui se

formait au passage de la vanne de fond, d'aval. Les principales dimensions des remous se trouveront sur les figures.

9. *Contraction sur le seuil et veine libre.* — L'orifice d'écoulement, dans ces expériences et dans les suivantes, avait une hauteur constante de $0^m,060$, et le seuil en était élevé de $0^m,151$ au-dessus du fond du canal. Lorsqu'on laissait le bief d'aval entièrement libre, la veine présentait le profil supérieur *abc* (*fig. 30*) d'abord concave, puis convexe et parabolique. Une portion du liquide, après avoir rencontré le fond du canal de fuite, refluaient vers l'orifice; pour des charges sur le centre inférieures à $0^m,16$, ce remous n'atteignant pas le seuil de l'orifice, enfermait, entre lui et la veine, une masse d'air, comme il arrive sous les nappes des barrages en déversoir.

Nous nous occuperons maintenant des mouvements qui ont lieu en amont du barrage dans lequel est pratiqué l'orifice d'écoulement.

10. *Phénomènes du remous superficiel d'amont.* — Pour les deux dispositions de cet orifice qu'on a considérées, c'est-à-dire avec contraction sur le côté supérieur seulement, ou sur ce côté et le seuil, la surface liquide, en amont du barrage, présente des circonstances remarquables. Les corps légers qu'on y place au milieu de la largeur du canal, arrivés à une certaine distance du barrage, croissante avec la charge sur l'orifice, subissent un ralentissement brusque de vitesse dû à la présence d'un remous partant du barrage, qui affecte des formes et renferme des mouvements plus compliqués qu'il ne paraît au premier abord.

Le profil longitudinal de ce remous se compose : 1° d'un gonflement à surface convexe *abc* (*fig. 31*); 2° d'une ligne légèrement inclinée *cd*, qui paraît droite, et qui est raccordée en *c* par une courbe concave avec le gonflement; 3° d'une sorte de talus *de*; 4° d'une suite d'ondulations *e...f* ayant chacune plusieurs millimètres d'amplitude; 5° enfin d'une série de rides se perdant dans la portion d'amont du courant, et d'une finesse ainsi que d'une netteté admirables.

Mode général de raccordement des remous superficiels. — Ces ondulations et ces rides sont analogues à celles que nous avons observées en amont d'un corps immergé en partie dans un courant réglé (*), et doivent pro-

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, février et juillet 1846.

blement aussi être rangées dans la même classe que celles observées par M. Poncelet, au contact d'une pointe avec les surfaces liquides (*) dans le mouvement relatif. C'est un phénomène général, c'est le mode universel de raccordement des remous avec les courants directs.

En projection horizontale (*fig. 32*), le remous qui nous occupe se termine par une courbe DD'D, concave vers l'amont et à ligne ondulée. Les corps légers et de petite dimension que l'on place près du barrage tombent vers les parois du canal, et cheminent ensuite parallèlement à celles-ci, comme l'indiquent les flèches dans la figure.

Arrivés à l'extrémité du remous, ces corps sont entraînés vers l'axe longitudinal et ramenés, en suivant des courbes *bcd*, *b'c'd'*, près du barrage où ils recommencent la même série de mouvements.

Les corps de même densité que l'eau et d'une certaine longueur, comme de petits cylindres de bois mouillé, placés en A, A', tournoient dans un plan vertical et sont quelquefois entraînés vers l'orifice.

La longueur ED' du remous, mesurée sur l'axe longitudinal du canal, augmente rapidement, pour une même levée de vanne, avec la charge sur le sommet de l'orifice et diminue, au contraire, quand, sous une même charge, on augmente la levée de vanne, comme le prouvent les trois premiers des résultats suivants, relatifs aux orifices sans contraction sur le seuil.

TABLEAU N° XXII.

| LEVÉE de vanne. | CHARGE sur le sommet. | LONGUEUR du remous. |
|--------------------|-----------------------------|---------------------------|
| 60 | 445 | 530 |
| 60 | 530 | 1270 |
| 80 | 461 | 450 |
| 120 | 324 | 240 |
| 150 | 150 | 150 |

Or, quand, sous la même charge, la hauteur de l'orifice est augmentée,

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, tome XLVI; 1831.

la vitesse dans le canal s'accroît en même temps ; la longueur du remous est donc indépendante de cette vitesse, ou plutôt en dépend beaucoup moins que des phénomènes qui ont lieu à l'orifice. Quand la veine était gênée par un obstacle en aval, le remous d'amont s'étendait d'autant plus loin que cet obstacle devenait plus considérable.

État de la surface du remous ; correspondance avec celui du fond. — Une particularité bien remarquable que présente la surface de ce remous consiste dans une multitude de petites cavités de quelques millimètres de diamètre, comme si cette surface était partagée par des lignes nodales, en compartiments agités par des tourbillons. Lorsque le courant entraîne du sable, on voit celui-ci se disposer, sur la partie du fond du canal qui correspond au remous superficiel, en lignes onduleuses très-rapprochées, mais seulement jusqu'à une faible distance de l'orifice, jusqu'à l'endroit où se manifeste l'accélération brusque qui a été précédemment signalée (2) ; à partir de cet endroit, il n'y a plus aucun dépôt.

Tourbillons et entonnoirs. — Il se forme, aux angles supérieurs de l'orifice, des tourbillons qui viennent aboutir à la surface du remous en B, B' (*fig. 32*) ; ces tourbillons donnent ainsi lieu à une longue colonne hélicoïde oblique SB (*fig. 31*) qui s'évase vers le haut, un peu courbée du côté de l'orifice et entraînant dans ses spires des bulles d'air. La distance des points B, B' au barrage augmente avec la charge sur le sommet de l'orifice.

CHAPITRE SECOND.

CALCUL DE LA DÉPENSE DES ORIFICES SANS CONTRACTION LATÉRALE ET ALIMENTÉS PAR UN CANAL, LA VEINE ÉTANT LIBRE OU GÊNÉE PAR UN GONFLEMENT DES EAUX D'AVAL.

11. Les belles expériences de MM. Poncelet et Lesbros (*) ont fait connaître les valeurs et les variations des coefficients de la formule de Torri-

(*) *Expériences sur les lois de l'écoulement de l'eau*, etc. (Paris, 1832). Ces expériences ont été faites à Metz aux frais du département de la Guerre, et commencées en 1827.

M. Bøyer, colonel d'État-major au service de Prusse, a présenté en 1844 (voir les *Comptes rendus*

celli, pour le cas d'orifices rectangulaires verticaux, en minces parois planes, ayant $0^m,200$ de base, et des hauteurs de $0^m,010$ à $0^m,200$, alimentés par un réservoir à grande section à niveau constant, et versant l'eau, soit librement dans l'atmosphère avec contraction complète, soit dans un coursier horizontal ou très-peu incliné, de même largeur que ces orifices.

M. Bidone, opérant sur de petits orifices, tant circulaires que rectangulaires, a déterminé (*) une formule empirique dont on se sert pour passer des coefficients relatifs au cas de l'écoulement en minces parois avec contraction complète, à ceux qui conviennent quand, par suite de dispositions prises en amont de ces orifices, on annule la contraction sur un ou plusieurs de leurs côtés.

Les expériences exécutées par M. Poncelet (**), à l'occasion de sa roue verticale à aubes courbes, ont fait connaître les valeurs des coefficients de la dépense théorique pour les vannages inclinés à l'horizon, avec contraction sur le côté supérieur seulement, établis sur un radier à forte pente, dans un coursier raccordé avec le réservoir alimentaire, et suivi, en aval, d'un ressaut et d'un rélargissement.

Enfin, M. Morin (***) a conclu d'expériences exécutées sous sa direction des coefficients relatifs au cas d'un orifice vertical, disposé en travers d'un canal, avec contraction sur le seuil, et d'une largeur de $1^m,496$ égale aux $\frac{7}{10}$ environ de celle de ce canal, sous des charges de $0^m,050$ à $0^m,180$ au-dessus du sommet de l'orifice.

12. Caractère particulier de l'écoulement dans les nouvelles expériences. — On voit que les circonstances de ces utiles recherches diffèrent

des séances de l'Académie des Sciences, tome XVIII, page 85) un Mémoire contenant une théorie de la contraction des veines d'eau engendrées dans les mêmes circonstances, et tombant librement dans l'air. Cette théorie repose sur l'hypothèse, que les particules liquides, dans le réservoir, se meuvent vers le centre de l'orifice avec des vitesses croissant en raison inverse du carré de leurs distances au même point; et l'auteur en déduit une formule destinée à représenter la loi de variation des coefficients de correction de la dépense théorique ordinaire, formule au sujet de laquelle nous avons fait quelques recherches qui seront publiées prochainement.

(*) *Mémoires de l'Académie de Turin*, tome XL, 1836.

(**) *Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes*, etc.; Metz, 1827.

(***) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXII, 1846.

toutes, par quelque particularité essentielle, de celles qui nous occupent. La plus importante est le mode de l'alimentation : quand l'eau s'écoule simplement par-dessous un barrage, et surtout lorsque la hauteur de l'orifice n'est pas très-petite par rapport à celle de la section du bief alimentaire, ce qui est le cas le plus fréquent du jaugeage des cours d'eau, les molécules liquides possèdent, en amont de la *section initiale*, c'est-à-dire de celle où commence à se former la veine, des vitesses notables qui influent sur les phénomènes de l'écoulement, par suite des actions mutuelles de ces molécules, et par leur force vive, en vertu de laquelle leur inertie exige, de la part des forces accélératrices de la veine, une quantité de travail plus faible, pour la même dépense de fluide, que dans le cas où elles partent du repos. Pour tenir compte des vitesses initiales des molécules, il semble qu'il suffirait d'ajouter aux charges statiques sur l'orifice les hauteurs dues à ces vitesses; mais, si cette méthode peut conduire quelquefois à une approximation suffisante pour la pratique, elle est loin d'être rigoureuse. En assimilant, en effet, l'écoulement à celui qui aurait lieu à partir du repos, on commet une erreur physique analogue à celle qui consisterait à admettre qu'à vitesses égales le mouvement d'un corps solide dans une masse fluide en repos développe les mêmes quantités d'action que le mouvement inverse. Un courant fluide est un espace rempli de corpuscules se déplaçant sans cesse les uns par rapport aux autres, et obéissant, dans ces déplacements relatifs, dans les oscillations qui les caractérisent, aux lois de l'attraction à petite distance; on ne saurait donc admettre à priori que la formation des veines fluides, quand elle se produit dans un milieu ainsi constitué, amène rigoureusement les mêmes résultats que quand les particules partent du repos, sous des pressions statiques égales.

Une autre cause d'inexactitude dans l'application du principe des forces vives aux circonstances qui nous occupent, réside dans l'excès de la force vive totale des tranches sur celle qui correspond à leur vitesse moyenne. On connaît le beau théorème de M. Poncelet, qui, en appelant l'attention des théoriciens sur cette source d'erreur, a montré que l'excès dont il s'agit se compose, en général, de deux termes, dont l'un provient du non-parallélisme et l'autre de la non-égalité des vitesses des particules fluides dans la section considérée. Or il résulte des phénomènes décrits dans le chapitre pré-

cédent, que, dans tous les cas d'écoulement en dessous d'un barrage, il y a, en amont de l'orifice, une section MN (*fig. 23*) où les particules fluides ont des mouvements de translation parallèles; c'est celle qui se trouve à l'origine du remous superficiel (10), et que tout porte à regarder comme la section initiale de la veine liquide. Les mêmes phénomènes nous indiquent, dans la plupart des cas, une section d'aval dans laquelle le parallélisme des mouvements translatatoires se rétablit; pour ces deux sections, le second terme de l'excès des forces vives dans le théorème de M. Poncelet subsiste seul. Je vais montrer de plus que ce terme lui-même doit être très-faible. Dans des expériences nombreuses que j'ai faites pour comparer la vitesse moyenne U à la vitesse V , au milieu de la surface dans une section située à 4^m,50 en amont d'un barrage en déversoir, la première de ces vitesses augmentait, pour une même valeur de l'autre, à mesure que la hauteur du barrage était accrue, tellement que le rapport $\frac{U}{V}$ atteignait la valeur 0,91 lorsque cette hauteur devenait égale aux $\frac{8}{10}$ de celle de la section où l'on prenait les vitesses. Il résulte de cette observation que la présence d'un barrage tend à égaliser les vitesses, au moins dans la région d'amont, dont la hauteur correspond à celle de ce barrage. Quant à la partie de la section MN (*fig. 23*), qui correspond à l'orifice, les vitesses des particules fluides, dans cette partie, devraient, en vertu de la résistance des parois du canal, décroître de haut en bas, et du milieu vers les bords; mais, dans l'orifice d'écoulement, les vitesses décroissant, au contraire, de bas en haut, et devant être sensiblement égales sur une même horizontale, il en résultait une action compensatrice sur la portion inférieure de la section initiale MN. Il en est de même, à plus forte raison, pour la section AG, qui est plus rapprochée de l'orifice. Ainsi l'on peut regarder comme très-probable que, dans les sections MN et AG, les vitesses des filets, qui sont parallèles, sont, en outre, respectivement, très-peu différentes entre elles; c'est-à-dire que le principe des forces vives, ou *de l'effet du travail*, suivant l'expression de M. Bélanger, doit conduire à des résultats à peu près exacts. Pour l'appliquer, nous remarquerons que, de MN en AG, il n'y a pas d'autre travail moteur que celui de la chute à la surface du courant, et celui qui est dû à l'excès de pression dans la section initiale MN, provenant de la vitesse que

les particules liquides y possèdent. Or, en supposant, pour les calculs, ce dernier travail équivalent à celui de la résistance des parois du canal, de la paroi du barrage et du bord supérieur de l'orifice, nous négligerons seulement la différence qui peut exister entre deux quantités très-faibles. En définitive, nous écrirons que la moitié de la force vive acquise depuis la section initiale jusqu'à la section contractée, est égale au travail de la chute h à la surface entre ces deux sections, ce qui donne, pour le débit du courant liquide,

$$Q = \omega \sqrt{2g \frac{h}{1 - \frac{\omega^2}{O^2}}}$$

Cela posé, en désignant par

e la hauteur de la section contractée AG ;

H' celle de la section initiale MN ;

H la charge sur le seuil de l'orifice, c'est-à-dire H' augmentée de la pente du fond du canal entre la section initiale et le barrage ;

L la largeur du canal ;

nous aurons

$$\omega = Le, \quad O = LH',$$

et, à moins d'un demi-millimètre près,

$$h = H - e;$$

d'où, en substituant dans la formule précédente,

$$(A) \quad Q = Le \sqrt{2g \frac{H - e}{1 - \left(\frac{e}{H'}\right)^2}}.$$

C'est au moyen de cette formule que l'on a calculé les dépenses théoriques contenues dans le tableau suivant, qui se rapporte à l'écoulement sans contraction sur le seuil, la veine cheminant librement dans le canal de fuite.

13. Comparaison des résultats du calcul avec ceux de l'expérience. — La première partie de ce tableau contient les résultats relatifs au cas où le

coursier d'aval est prolongé indéfiniment; la seconde concerne celui où ce canal est prolongé seulement de la quantité nécessaire pour faire acquérir à la veine le parallélisme des mouvements de translation. Les séries II et IV de la première partie proviennent d'expériences exécutées en 1846, et dans lesquelles on n'avait pas mesuré la hauteur e de la section contractée; nous avons donc, pour ces deux séries, déduit cette hauteur, par interpolation graphique, des mesures directes effectuées l'année suivante, moyen suffisamment exact à cause de la faible influence de la levée de vanne sur la grandeur de la contraction.

La largeur L des orifices, égale à celle du canal, est $0^m,900$ pour les séries I et III, et $0^m,898$ pour les séries II et IV. Quant à la série V, le vannage correspondant est celui qui a été décrit au n° 1 du chapitre précédent; nous rappellerons que la largeur L de la veine était de $1^m,606$, et que le coefficient de la contraction géométrique, obtenu dans une autre série d'expériences (4), était 0,66.

Dans ce tableau et les suivants, toutes les dimensions ont été exprimées en millimètres, les volumes en litres, et les temps en secondes sexagésimales.

TABLEAU N° XXIII.

| NUMÉROS D'ORDRE | | LEVÉE de vanne. | CHARGE sur le seuil de l'orifice H. | HAUTEUR de la section contractée c. | HAUTEUR de la section initiale H'. | DÉPENSE calculée en employant la formule (A) Q. | JAUGEAGE DIRECT. | | | RAPPORT de la dépense observée à la dépense calculée $\frac{D}{Q}$ |
|-----------------|--------------------------|-----------------------|---|---|--|---|--|------------------------------------|---|--|
| des séries. | des expé- riences. | | | | | | HAUTEUR dont le niveau s'est élevé dans le bassin de jauge. | DURÉE de l'observa- tion. | DÉPENSE observée par 1 seconde sexagé- simale D. | |
| I. | 1 | 48,5 | 503,0 | 29,0 | 497,0 | 79,683 | 1092,0 | 245,0 | 80,237 | 1,007 |
| | 2 | 48,5 | 361,0 | 27,9 | 355,0 | 67,258 | 1053,0 | 284,0 | 66,746 | 0,992 |
| | 3 | 48,5 | 196,5 | 27,0 | 194,5 | 48,138 | 99,0 | 360,0 | 47,955 | 0,996 |
| II. | 4 | 80,0 | 541,0 | 47,8 | 539,0 | 133,996 | 926,0 | 121,0 | 137,777 | 1,028 |
| | 5 | 80,0 | 400,0 | 46,5 | 398,0 | 113,314 | 845,0 | 135,0 | 112,683 | 0,994 |
| III. | 6 | 99,7 | 630,0 | 59,0 | 626,0 | 178,469 | 974,0 | 96,5 | 181,700 | 1,018 |
| | 7 | 99,4 | 365,0 | 58,3 | 361,0 | 130,440 | 975,0 | 131,5 | 133,480 | 1,023 |
| | 8 | 99,4 | 161,0 | 57,0 | 157,0 | 78,386 | 997,0 | 224,5 | 79,984 | 1,020 |
| | 9 | 99,4 | 155,5 | 57,0 | 151,5 | 76,950 | 974,0 | 222,5 | 78,846 | 1,020 |
| | 10 | 99,4 | 143,5 | 57,4 | 139,5 | 73,409 | 1013,0 | 240,5 | 75,826 | 1,033 |
| IV. | 11 | 120,0 | 444,0 | 70,7 | 442,0 | 174,030 | 1072,0 | 110,0 | 175,440 | 1,008 |
| | 12 | 120,0 | 374,0 | 70,2 | 372,0 | 156,720 | 1118,5 | 129,5 | 158,260 | 1,010 |
| MOYENNE..... | | | | | | | | | | 1,012 |
| V. | 1 | 21,3 | 603,0 | 14,1 | 621,0 | 76,953 | 610,0 | 141,0 | 77,881 | 1,012 |
| | 2 | 20,2 | 378,5 | 13,3 | 401,0 | 57,342 | 1043,0 | 336,0 | 55,881 | 0,974 |
| | 3 | 20,2 | 315,0 | 13,3 | 337,0 | 52,118 | 832,0 | 293,0 | 51,118 | 0,981 |
| | 4 | 20,2 | 157,5 | 13,3 | 176,0 | 36,123 | 746,0 | 360,0 | 37,120 | 1,027 |
| | 5 | 30,8 | 480,0 | 20,3 | 501,0 | 97,903 | 928,0 | 168,5 | 99,145 | 1,013 |
| | 6 | 52,0 | 289,5 | 34,3 | 311,0 | 123,269 | 937,0 | 143,0 | 123,126 | 0,999 |
| MOYENNE..... | | | | | | | | | | 1,001 |

14. *Confirmation des considérations théoriques.* — Ces résultats confirment les considérations générales exposées plus haut, et l'on voit, en outre, que la formule théorique (A) conduit à des valeurs de la dépense des orifices suffisamment exactes pour les applications usuelles, sans qu'il soit nécessaire de lui appliquer des coefficients de correction, résultat analogue à celui que nous avons obtenu déjà pour les déversoirs sans contraction latérale.

On pourrait objecter, il est vrai, la faible grandeur des charges qui avaient lieu dans ces expériences, où elles n'ont pas dépassé 0^m,630; mais nous ferions remarquer que les petites charges sont précisément celles qui se rencontreront le plus ordinairement dans le jaugeage des petits cours

d'eau : ce sont encore celles des prises d'eau des irrigations et des orifices des roues hydrauliques à faible vitesse. Bien plus, il est permis de conclure des résultats précédents l'exactitude de la formule (A), indépendamment de toute valeur particulière des charges, car celles-ci ont varié de 1 à 4,4 dans la série III, de 1 à 2,6 dans la série I, et les variations très-faibles du rapport $\frac{D}{Q}$ se sont produites, pour les séries I et II, dans un sens différent de celui qui se présente pour la série III.

Quant à la dernière série, qui paraîtrait indiquer une approximation supérieure à celle des précédentes, nous ferons observer que les planchettes, dont le fond et les côtés du canal étaient munis, quoique très-minces et raccordées avec les côtés correspondants de l'orifice, faisaient prendre une légère courbure aux filets les plus voisins de la veine; circonstance qui exigerait, à la rigueur, un coefficient de correction dont nous aurons la valeur approchée en divisant le rapport expérimental 1,001 relatif à la série V par la valeur 1,012 de ce rapport obtenue pour les autres, ce qui donne le coefficient 0,989.

Enfin, nous avons cru pouvoir nous dispenser de faire d'autres expériences vérificatives pour une plus grande inclinaison du canal, parce que les résultats de celles-ci prouvant que le principe des forces vives est applicable au cas d'écoulement dont il s'agit, aucune des circonstances du mouvement de l'eau ne donne lieu à penser que l'exactitude pratique de ce principe puisse être altérée par l'augmentation de la pente du coursier.

Observation relative à l'emploi de la formule proposée. — Il est donc bien établi que la formule (A) fournit, avec un degré d'approximation supérieur à celui dont on se contente ordinairement dans la pratique, le débit d'un orifice rectangulaire avec contraction sur le côté supérieur seulement, lorsque, soutenue par un prolongement du seuil et des côtés verticaux de cet orifice en aval, la veine peut, avant de tomber librement dans l'air ou de s'écouler dans un canal de fuite, arriver au parallélisme des filets liquides. L'emploi de cette formule exige, il est vrai, la mesure de l'épaisseur e de la veine dans la section où cette circonstance se produit; mais on remarquera que cette opération très-simple, qui peut se faire en approchant l'arête

d'une règle jusqu'au contact de la surface liquide, et relevant la hauteur de cette arête au-dessus du fond du coursier, dispense de la considération des coefficients de correction, bien autrement compliquée ici, puisque, d'après les considérations exposées aux n^{os} 2 et 3, ces coefficients devraient varier avec la charge sur le sommet des orifices, la hauteur de ceux-ci et la pente du canal.

15. *Influence des obstacles d'aval, et moyens d'en tenir compte dans les calculs.* — Occupons-nous maintenant des cas où le courant d'aval, toujours issu d'un orifice sans contraction sur le seuil, est gêné par des obstacles. Ces obstacles peuvent être, ou une contre-pente du canal de fuite, ou un rétrécissement du même canal, un exhaussement du fond, ou enfin les crues du cours d'eau d'aval. Quelle que soit la cause, l'effet produit sera toujours un gonflement des eaux d'aval plus considérable et plus rapproché de l'orifice que si l'obstacle n'existait pas, effet que nous avons obtenu, comme il a été dit précédemment, au moyen d'un barrage de hauteur variable placé dans la partie rélargie du canal d'expériences, à 10 mètres de l'orifice. On a vu (7) quelles sont les différentes phases du phénomène; nous les partagerons, pour le calcul, en deux cas principaux, celui où le remous noie complètement l'orifice, et ceux où cette circonstance n'a pas lieu.

Dans ces derniers cas, il est facile d'apercevoir que la veine se forme et chemine sous les petites vagues qui retombent du sommet du remous, comme elle faisait à l'air libre : aussi, pensons-nous qu'il convient d'appliquer (*) la formule (A), en tenant compte, toutefois, du changement apporté par l'obstacle dans la grandeur de la contraction géométrique. La mesure de la section contractée devient, à la vérité, difficile quand la veine est recouverte en deçà de cette section; cependant on en peut obtenir encore une valeur suffisamment approximative, en soutenant, pendant un temps très-court, la partie inférieure du remous au moyen d'une planche, et découvrant ainsi la veine; ou bien, si l'on peut observer la section contractée quand le remous s'arrête encore à cette section, on admettra que le coefficient de la

(*) Cette application suppose implicitement que la veine, surmontée d'une masse d'eau assez considérable, ne transmet pas en amont la pression correspondante à la hauteur de cette masse; hypothèse qui se trouve confirmée par l'accord de la formule avec les résultats d'expérience.

contraction géométrique soit le même lorsqu'il l'a franchie; c'est ce que nous avons fait ici en adoptant la valeur 0,602 de ce coefficient (3).

Lorsque l'orifice est noyé, on ne peut plus faire aucune observation sur la forme et le mouvement de la veine; mais nous supposons que l'une et l'autre aient lieu comme précédemment. La condition nouvelle qui s'introduit ici consiste dans les mouvements que cette veine imprime, par communication latérale, à la masse liquide placée au-dessus d'elle, et dont on ne peut plus faire abstraction: ces mouvements sont du genre des tourbillons qui se produisent dans les changements brusques de dimension des conduites, et il paraît nécessaire d'en tenir compte par la méthode de Borda, comme l'a fait M. Poncelet. (*Cours de l'École de Metz*, section VI.)

Nommant donc :

- ω l'aire de la section contractée ;
- U la vitesse moyenne dans cette section;
- O l'aire de la section initiale d'amont, et H' sa hauteur ;
- O' l'aire de la section du bief d'aval, où les mouvements translatatoires des molécules redeviennent sensiblement parallèles, et dont la hauteur H'' est à peu près celle du sommet du remous ;
- W et W' les vitesses moyennes respectives de ces deux sections ;
- h la différence des niveaux d'amont et d'aval pris à l'endroit des sections O et O' ;
- z et z' les hauteurs respectives des sommets de ces deux sections au-dessus de la section contractée ;
- p la pression qui a lieu sur l'unité de surface de la section contractée, et indépendamment de celle de l'atmosphère ;
- ϖ le poids de l'unité de volume du fluide.

Le principe des forces vives appliqué au travail des forces extérieures entre les sections O et ω , donne l'équation

$$\frac{1}{2} dm (U^2 - W^2) + \frac{1}{2} dm (U - W')^2 = gdmz - gdm \frac{p}{\varpi};$$

on a de même, entre les sections ω et O' ,

$$\frac{1}{2} dm (W'^2 - U^2) = gdm \frac{p}{\varpi} - gdmz'.$$

Ajoutant ces deux équations pour éliminer p , et remarquant que

$$OW = O'W' = \omega U = Q,$$

et que

$$z - z' = h,$$

on obtient

$$Q = \omega \sqrt{2g \frac{h}{\omega^2 \left(\frac{1}{O'^2} - \frac{1}{O^2} \right) + \left(1 - \frac{\omega}{O'} \right)^2}}.$$

Comme d'ailleurs, dans le cas qui nous occupe,

$$\omega = eL, \quad O' = LH'', \quad O = LH',$$

on voit que la dépense théorique est

$$(B) \quad Q = Le \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{e}{H''} \right)^2 - \left(\frac{e}{H'} \right)^2 + \left(1 - \frac{e}{H''} \right)^2}}.$$

Il reste à déterminer approximativement la hauteur e de la section contractée. Or nous avons trouvé (3) que, pour l'orifice de 0^m,0997 de hauteur et une charge de 0^m,520 sur le seuil, l'influence du remous augmentait le coefficient de la contraction géométrique dans le rapport de 1 à 1,019; adoptant ce rapport, nous avons déterminé les valeurs du coefficient dont il s'agit par interpolation graphique au moyen de celles qui avaient été obtenues (2) pour la veine libre. On trouvera dans le tableau suivant les résultats de l'expérience comparés à ceux du calcul, avec l'indication des phénomènes correspondants.

La largeur de l'orifice était 0^m,900.

TABLEAU N° XXIV.

| NUMÉROS D'ORDRE | LEVÉE de vanne. | CHARGE sur le seuil de l'orifice H. | HAUTEUR de la section initiale d'amont H. | HAUTEUR de la section des mou- vements H ₁ . | DIFFÉ- rence entre les sommes de ces deux sections. | DÉPENSE calculée théorique- ment Q. | JAUGEAGE DIRECT. | | | RAPPORT de la dépense observée à la dépense calculée $\frac{D}{Q}$. | INDICATION des phénomènes et de la formule employée. |
|-----------------|-----------------------|--|--|--|--|---|--|------------------------------------|---|---|---|
| | | | | | | | HAUTEUR d'eau dans le bassin de jauge. | DURÉE de l'observa- tion. | DÉPENSE observée par seconde mètre D. | | |
| I. | 99,7 | 524,5 | 520,5 | " | " | litres 163,998 | 981,5 | 107,5 | 164,863 | 1,005 | La veine refoule le remous jusqu'en aval de la section contractée. Formule (A). |
| | 99,7 | 523,0 | 519,0 | " | " | 163,782 | 997,5 | 108,5 | 165,171 | 1,008 | |
| | 99,7 | 520,0 | 516,0 | " | " | 163,242 | 980,0 | 107,5 | 164,112 | 1,005 | |
| II. | 99,7 | 520,0 | 516,0 | " | " | 163,742 | 913,0 | 101,0 | 163,229 | 0,999 | Le remous retombe jusqu'à l'orifice par petites vagues qui en sont alternative- ment repoussées. Formule (A). |
| | 99,4 | 625,5 | 611,5 | " | " | 180,630 | 991,5 | 98,5 | 181,208 | 1,003 | |
| | 99,7 | 527,0 | 523,0 | " | " | 171,430 | 971,5 | 110,5 | 158,760 | 0,966 | |
| | 99,4 | 608,0 | 604,0 | " | " | 176,717 | 1008,0 | 106,5 | 170,385 | 0,964 | |
| III. | 99,7 | 620,5 | 625,5 | 520,0 | 118,0 | 92,973 | 1018,0 | 197,0 | 93,026 | 1,006 | L'orifice est complètement bouché. Formule (B). |
| | 99,7 | 589,0 | 585,0 | 499,0 | 98,5 | 85,245 | 1008,0 | 211,0 | 86,043 | 1,009 | |
| | 99,7 | 545,0 | 541,0 | 432,0 | 121,5 | 99,444 | 1019,0 | 189,0 | 99,963 | 1,036 | |
| MOYENNE..... | | | | | | | | | | | 1,017 |

16. *Conséquences des résultats de l'expérience.* — Les résultats de la série I et ceux des expériences 4 et 5 font voir que la formule (A) s'applique aussi bien au cas d'un obstacle en aval qu'à celui de la veine libre dans le coursier, même quand la partie inférieure du remous produit par l'obstacle retombe sur la veine, pourvu toutefois qu'elle ne vienne pas couvrir l'orifice; car, dans ce cas, il se produit une diminution évidente de la dépense. Ces résultats s'expliquent par la nature même des phénomènes. En effet, tant que les ondes légères du remous ne font que glisser sur la veine en s'arrêtant à quelques centimètres de l'orifice, elles sont périodiquement entraînées par ce courant, et ne donnent lieu à d'autre effet dynamique contraire à l'écoulement que celui de leur inertie et des petits chocs qu'elles produisent en retombant sur la veine, effets qui sont relativement trop faibles, à cause de la petitesse des masses de ces ondes, pour modifier sensiblement les résultats, et ne sont même probablement pas transmis par la veine. Mais, quand les ondes restent en permanence contre le plan de l'orifice, ces masses, qui sont augmentées, agissent sans interruption par leur poids : pour s'en convaincre, on remarquera que, dans les expériences nos 6 et 7 (série II), les ondes qui baignaient l'orifice s'élevaient à la hauteur de son sommet, et l'on substituera, dans la formule (A), la charge sur le sommet de l'orifice, à la hauteur du niveau d'amont au-dessus de la section contractée; les dépenses calculées au moyen de cette formule deviennent

| | | |
|-------------|---------|---------|
| Expériences | 6 | 7 |
| $Q =$ | 157,410 | 171,110 |

qui s'accordent aussi bien qu'on puisse l'espérer avec les dépenses observées D , puisque le rapport moyen de ces dépenses est $\frac{D}{Q} = 1,002$.

17. *Proposition relative à la transmission des pressions par les veines liquides.* — De l'ensemble des résultats d'observation et de calcul qui concernent le cas d'un gonflement des eaux d'aval, il résulte cette proposition générale que :

Les veines liquides ne transmettent pas en amont la pression des remous, excepté quand cette pression s'exerce immédiatement sur l'orifice.

18. *Mouvement d'une onde superposée à une masse d'eau en repos.* — Nous pensons devoir rapprocher de ces résultats une observation que nous

avons faite depuis longtemps sur la propagation des ondes superposées à une masse liquide en repos. Si, dans un canal, on établit d'abord une couche d'eau en repos ABCD (*fig.* 33); puis, qu'en levant un peu une vanne placée en tête de ce canal, on y lance une lame d'eau, celle-ci cheminera sur la masse ABCD en affectant la figure *mno* ou le profil *m'n'o'*, sans qu'on puisse apercevoir aucun mouvement, aucun signe extérieur de transmission de pression en aval de cette onde.

19. Revenons au calcul de la dépense. Les résultats de la série III prouvent que la formule (B) représente, avec le degré d'approximation désirable, le volume d'eau qui s'écoule par un orifice noyé quand il n'y a de contraction que sur le côté supérieur; il en ressort la confirmation du fait que nous avons présumé devoir se produire, savoir, que la veine chemine, dans ce cas, sous la masse liquide qui la couvre, comme lorsqu'elle était libre, jusqu'à la section contractée, qui se modifie seulement un peu dans son épaisseur.

Il n'était pas sans utilité de prouver encore, par ce dernier exemple, que le principe des forces vives, lorsqu'on en base l'application sur la connaissance des phénomènes physiques, conduit à des solutions suffisamment approximatives pour la pratique dans bien des cas où l'on pourrait être porté à en abandonner l'emploi: mais l'usage des formules (A) et (B) devenant difficile ou exposant à des incertitudes sur la valeur de la section contractée de la veine lorsqu'elle est couverte par le pied du remous, il sera préférable, alors, de calculer la dépense des orifices au moyen de la formule théorique ordinaire

$$(C) \quad Q = A \sqrt{2g \frac{h}{1 - \frac{A^2}{O^2}}}$$

affectée de coefficients de correction; formule dans laquelle A est l'aire de l'orifice lui-même, et O celle de la section alimentaire prise à une certaine distance du vannage, à l'origine du remous superficiel d'amont. Quant à la valeur de *h*, ce sera la charge sur le sommet de l'orifice lorsqu'il ne sera pas complètement noyé: dans le cas contraire, *h* sera la différence de niveau entre le sommet de la section O et celui de la section du remous d'aval où les mouvements translatatoires du liquide paraissent être redevenus parallèles.

Cela posé, les résultats d'expériences consignés dans le tableau précédent donnent pour les valeurs des coefficients de correction :

- 0,622 quand les petites vagues du remous tombent entre l'orifice et la section contractée;
- 0,600 lorsqu'elles atteignent le sommet de l'orifice;
- 0,688 quand l'orifice est complètement noyé par la masse du remous.

Après avoir étudié, dans ses diverses circonstances pratiques, l'écoulement sous une seule contraction, nous avons fait quelques expériences pour pouvoir comparer ce cas avec celui où le seuil de l'orifice est élevé, sans raccordement, à une certaine hauteur au-dessus du fond du canal.

20. Dépense des orifices avec contraction sur les côtés supérieur et inférieur. — Il résulte de la description que nous avons précédemment donnée des phénomènes hydrauliques relatifs à ce genre d'écoulement, qu'il est essentiel de distinguer, dans le calcul de la dépense, le cas où la veine tombe librement sur le fond du canal de fuite et celui où elle est gênée par un gonflement plus ou moins considérable des eaux d'aval. Dans le premier cas, la forme de la trajectoire courbe de la veine ne permettant point aux particules fluides de prendre, même momentanément, des mouvements de translation parallèles, on est obligé d'avoir recours à la formule théorique ordinaire (C), affectée de coefficients de correction que nous déterminerons en mettant dans cette formule pour h la charge sur le centré de l'orifice.

Lorsque la veine faisait irruption dans un gonflement ou remous d'aval, qui ne noyait point l'orifice, sa surface supérieure devenait, à une faible distance de cet orifice, sensiblement parallèle au fond du canal, et il semble que le principe des forces vives, appliqué entre la section où avait lieu ce parallélisme momentané et la section alimentaire O d'amont, doit encore conduire ici à une formule approximative de la dépense. Mais en examinant les circonstances du mouvement, on voit que les filets inférieurs de la veine, en dessous et en aval du seuil, se repliaient sur eux-mêmes, par l'effet de l'inertie de la masse du remous, et donnaient lieu à un tourbillonnement vertical; de sorte que le parallélisme de la surface supérieure de la veine et du fond dans la section précitée n'était qu'un faux indice de celui des filets

du courant. On emploiera donc encore, dans ce cas, la formule (C), mais en y substituant pour h la charge sur le sommet de l'orifice. Le tableau suivant contient les résultats de l'expérience et les coefficients qui s'en déduisent. Le seuil de l'orifice s'élevait de 0^m,151 au-dessus du fond du canal, sa largeur était 0^m,897, et la levée de vanne 0^m,060. Pour mesurer les charges, on est parti de la section où commence le remous superficiel d'amont, regardée comme la section initiale de la veine.

TABLEAU N° XXV.

| NUMÉROS d'ordre. | CHARGES | | HAUTEUR de la section initiale d'amont. | DÉPENSE de fournie par l'expé- rience. | DÉPENSE théorique. | COEFFI- cients de la formule (C). | INDICATION des phénomènes hydrauliques. | DIFFÉRENCE de niveau entre le sommet du remous et celui de la section initiale dans le bief d'amont. |
|---------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---|---|-----------------------|---|---|---|
| | sur le centre de l'orifice. | sur le sommet de l'orifice. | | | | | | |
| | mm | " | mm | litres | litres | | | |
| 1 | 192 | " | 373 | 69,630 | 105,810 | 0,658 | La veine tombe librement dans le canal de fuite (fig. 30). | " |
| 2 | 276 | " | 457 | 82,134 | 126,369 | 0,650 | | " |
| 3 | 338 | " | 519 | 90,492 | 139,394 | 0,649 | | " |
| 4 | 411 | " | 592 | 99,393 | 153,548 | 0,647 | | " |
| 5 | " | 315 | 526 | 86,824 | 131,658 | 0,645 | Le remous fait tomber des vagues onduleuses transversales jusqu'à 0 ^m ,15 de l'orifice (fig. 26 et 27). | 246 |
| 6 | " | 320 | 531 | 85,558 | 135,680 | 0,631 | Deuxième état du remous.... Sa surface est fortement ondulée dans le sens longitudinal (fig. 28). | 311 |
| 7 | " | 313 | 524 | 82,810 | 134,227 | 0,617 | Le rétrécissement du débouché d'aval continuant à augmenter, le remous change d'aspect, et il se forme, à une faible distance de l'orifice, un gonflement de plus en plus considérable (fig. 29). | 240 |
| 8 | " | 389 | 600 | 91,457 | 149,314 | 0,613 | | 270 |
| 9 | " | 299 | 510 | 75,914 | 131,213 | 0,578 | | 117 |

Conséquences des résultats précédents. — Considérant d'abord les quatre premières expériences dans lesquelles le courant d'aval n'était point gêné par un obstacle, nous remarquerons que les coefficients obtenus par MM. Poncelet et Lesbros pour le cas de la contraction complète et de l'écoulement libre dans l'atmosphère augmentent avec les charges entre les limites de celles que nous avons employées, tandis qu'ici leur variation suit un ordre inverse: comme, d'ailleurs, pour tenir compte de la non-existence de la contraction sur les côtés verticaux de notre orifice, il suffirait, d'après les recherches de M. Bidone, d'augmenter dans un rap-

port constant les coefficients qui auraient été obtenus dans le cas de la contraction complète, on ne saurait attribuer le décroissement de ces coefficients qu'à l'influence du remous-tourbillon formé au pied du barrage, remous qui est dû à l'épanouissement, sur le fond du canal d'aval, de la veine liquide dont une partie, refluant vers l'orifice, est remontée le long de la paroi BD (*fig. 30*) à une hauteur croissante avec la charge.

Comparant maintenant à ce cas d'écoulement celui où la contraction n'avait lieu que sur le sommet de l'orifice, le seuil de celui-ci étant sur le fond des canaux d'amont et d'aval, on verra, en rapportant à la même formule (C) les résultats de nos expériences relatifs à ce dernier cas, que les coefficients déduits de ces expériences sont plus faibles que ceux du tableau précédent. En outre, ils augmentent avec la charge sur le centre, comme dans le cas où l'orifice verse librement dans l'atmosphère. Ainsi, lorsque, pour l'écoulement avec contraction sur le seuil, les valeurs des coefficients sont 0,658 et 0,650, ils seraient, à égalité de charges et de levée de vanne, 0,584 et 0,600, pour l'écoulement avec contraction sur un côté seulement. De sorte que la résistance du radier du canal semble diminuer les vitesses de la veine liquide, plus que ne le font les influences combinées de la contraction sur le côté inférieur, et de l'eau qui remonte vers l'orifice en dessous et en aval du seuil exhaussé, quoique cette dernière influence soit assez forte pour renverser l'ordre de variation des coefficients; conséquence difficile à admettre sans modification. Examinons maintenant la deuxième série des résultats du tableau précédent. Dans les trois premières expériences de cette série, la charge d'amont était à très-peu près constante, de sorte que le décroissement des coefficients paraît devoir être attribué au gonflement des eaux du bief d'aval: d'un autre côté, la faiblesse de ce décroissement n'est nullement en rapport avec la hauteur du remous; celui-ci n'exerçait donc sur l'écoulement qu'une influence indirecte en modifiant la forme de la veine dont la surface supérieure, au lieu de tomber suivant une trajectoire convexe, était obligée de se tendre au sortir de l'orifice, en affectant une courbure concave analogue à celle qui avait lieu dans le cas de l'écoulement sans contraction inférieure.

En résumé, nous voyons que : 1° pour les mêmes charges et les mêmes levées de vanne, l'orifice avec contraction sur le seuil et versant sans

obstacle dans le canal de fuite dépensait *un peu plus*, d'une part, que le même orifice sous l'influence d'un remous d'aval considérable, et, d'autre part, que l'orifice avec contraction sur le côté supérieur seulement et sans obstacle en aval; 2° que la diminution de la dépense dans ces deux derniers cas, en apparence si dissemblables, était accompagnée d'une même courbure concave de la veine au delà de l'orifice. Enfin, en rapprochant ces faits de ceux qui concernent les barrages noyés, dans la première partie de ce Mémoire, nous sommes conduit à regarder les modifications de courbure des nappes et des veines fluides, dans le voisinage des orifices, comme la conséquence physique la plus générale des résistances de tout genre au mouvement de ces courants, et, en même temps, comme la cause immédiate des modifications que subit la dépense des pertuis.

LÉGENDE DES TABLEAUX DES RÉSULTATS D'EXPÉRIENCES.

PREMIÈRE PARTIE. — DÉVERSOIRS.

| | Pages |
|---|------------|
| TABLEAU I. — Hauteurs de la colonne liquide soutenue au pied d'un barrage par la pression de la partie inférieure de la nappe. | 146 |
| TABLEAU II. — Comparaison des hauteurs de la colonne des tubes hydrostatiques avec celles du niveau horizontal dans le réservoir d'amont. | 154 |
| TABLEAU III. — Coordonnées du profil longitudinal de la surface liquide en amont d'un barrage, correspondantes à différentes charges et différents états de la nappe. | 156 |
| TABLEAUX IV et V. — Étude des pentes et des dépressions de cette surface. | 156 et 158 |
| TABLEAU VI. — Valeurs du rapport entre la charge du déversoir et l'épaisseur de la nappe dans le plan du barrage pour les nappes libres. | 161 |
| TABLEAU VII. — Valeurs du même rapport pour les nappes noyées en dessous. | 163 |
| TABLEAU VIII. — Correction à faire dans la largeur du déversoir pour tenir compte de la présence du tube hydrostatique. | 172 |
| TABLEAU IX. — Comparaison des résultats de l'expérience avec ceux du calcul pour les nappes libres et les canaux rectangulaires. | 176 |
| TABLEAU X. — Même comparaison pour les nappes adhérentes au barrage et les nappes noyées en dessous. | 181 |
| TABLEAU XI. — Valeurs du facteur $\sqrt{1-k}$ de la nouvelle formule pour les mêmes cas. | 183 |
| XXXIII* <i>Cahier.</i> | 36 |

| | Pages. |
|--|------------|
| TABLEAU XII... — Résultats d'expériences relatifs aux canaux à section trapézoïdale avec talus à $\frac{2}{1}$ environ. | 185 |
| TABLEAU XIII... — Résultats d'expériences relatifs aux canaux à section trapézoïdale avec talus à l'inclinaison des terres coulantes. | 187 |
| TABLEAU XIV... — Coefficients de l'ancienne formule des déversoirs pour les canaux à section trapézoïdale. | 189 |
| TABLEAU XV... — Résultats d'expériences relatifs aux barrages noyés par un gonflement des eaux d'aval. | 192 |
| TABLEAUX XVI et XVII. — Résultats d'expériences relatifs aux barrages obliques. | 195 et 196 |
| TABLEAU XVIII. — Résultats d'expériences relatifs aux barrages en chevrons. | 198 |
| TABLEAU XIX. — Résultats d'expériences relatifs aux barrages établis dans une portion de canal dont la largeur n'est pas constante. | 200 |

DEUXIÈME PARTIE. — ORIFICES AVEC CHARGE SUR LE SOMMET.

| | |
|---|-----|
| TABLEAU XX... — Coefficients de la contraction géométrique verticale. | 204 |
| TABLEAU XXI... — Éléments de la trajectoire des grandes veines liquides. | 207 |
| TABLEAU XXII.. — Longueurs des remous superficiels dans le canal d'amont. | 215 |
| TABLEAU XXIII. — Comparaison des résultats de la nouvelle formule avec ceux de l'expérience, pour le cas où la veine, sans contraction sur le seuil de l'orifice, chemine librement dans le coursier d'aval. | 222 |
| TABLEAU XXIV. — Comparaison des dépenses observées avec les dépenses calculées pour le cas où la veine, sans contraction sur le seuil de l'orifice, est gênée par un gonflement des eaux d'aval. | 227 |
| TABLEAU XXV.. — Éléments du calcul de la dépense des orifices avec contraction sur les côtés inférieur et supérieur. | 231 |



MÉMOIRE

SUR LE

FROTTEMENT DES ENGRENAGES CONIQUES

ET DE LA VIS SANS FIN;

PAR M. H. RESAL,

Élève ingénieur des Mines.

M. Poncelet s'est occupé le premier de la recherche du travail absorbé par le frottement dans les engrenages coniques : il s'est borné au cas de pratique le plus favorable, où le contact des dents est peu étendu; et, dans son Cours à l'École d'Application de Metz, il a donné, de 1825 à 1826, une formule très-simple déduite, par des considérations géométriques, de l'expression du frottement dans les engrenages cylindriques qu'il avait traité d'abord.

Un peu plus tard (*), M. Coriolis est parvenu, par de longs calculs et en se plaçant dans le cas considéré par M. Poncelet, à une formule qui ne diffère de celle de ce dernier que par la forme seulement, et dont M. Combes a offert, en 1837, dans le Journal de M. Liouville, une démonstration plus élémentaire.

La question relative au travail du frottement dans les engrenages coniques en est donc restée au point où l'a laissée M. Poncelet. Je me propose ici de la traiter complètement en cherchant d'abord l'expression générale de ce frottement, puis celle du travail qu'il absorbe, lorsque le contact a lieu sur une étendue quelconque, toujours dans l'hypothèse où le mouvement est uniforme, et en négligeant de plus, avec les auteurs précités, les frottements dus aux pressions sur les tourillons et les épaulements des arbres. Des formules auxquelles je suis arrivé, j'ai déduit, comme vérification, les

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXIV^e cahier, 1835.

formules relatives aux engrenages cylindriques et les formules pratiques dues à M. Poncelet.

Je termine ces différentes recherches par l'évaluation de la perte de travail due au frottement dans la vis sans fin, sujet qui avait déjà occupé MM. Navier, Guillebon et Combes, mais qui se trouve ici traité sous un autre aspect et avec un plus grand degré de rigueur, si je ne me trompe.

ENGRENAGES CONIQUES.

§ I. — Recherche de l'intensité du frottement.

Dans l'hypothèse du mouvement uniforme, les forces qui sollicitent chaque roue se font constamment équilibre, ce qui s'exprime en égalant à zéro la somme de leurs moments par rapport à l'axe. De plus nous négligerons les frottements sur les appuis, ce qui annule l'influence des composantes parallèles à cet axe.

D'après cela, sans rien ôter de la généralité de la question, nous pouvons supposer la puissance P dirigée perpendiculairement à l'axe de la roue conductrice et la résistance Q dirigée de même par rapport à l'axe de l'autre roue. Enfin, comme on peut remplacer chaque force par une autre de même moment, nous supposerons que ces forces agissent tangentiellement à deux cercles des cônes primitifs, passant par un même point A , de la génératrice de contact de ces roues.

Soient (*fig. 1 et 2, Pl. VI*) SO l'axe de la roue conductrice; SO' celui de la roue conduite; SA la génératrice de contact des deux cônes; Sm la génératrice de contact des deux dents. Le plan SAm est, comme on le sait, normal aux deux dents. Soient

$$\text{angle } OSA = a, \quad O'SA = a', \quad \text{angle } ASm = \alpha, \quad r = OA, \quad r' = O'A;$$

θ l'angle des deux plans SAO' , SAm ; mA la normale menée aux dents par le point A . Je suppose que mI , mI' soient les lieux des pieds des normales abaissées des points des circonférences OA , $O'A$ sur les dents correspondantes, lieux limités en I et I' , par ces circonférences.

La roue SO' exerce, en chaque point de l'arête Sm , sur la roue SO , une pression élémentaire n , parallèle à Am , qui produit un frottement nf , per-

pendiculaire au plan ASm . Les résultantes $\Sigma n = N$, $\Sigma nf = Nf$ de ces pressions et de ces frottements, passent en un certain point n de l'arête SA , point qui, de même que la loi de distribution des pressions n , nous est complètement inconnu. Les pressions élémentaires exercées par la roue SO sur la roue SO' sont respectivement égales et opposées aux précédentes; la résultante de ces pressions est donc une force N' , égale et directement opposée à la force N , et la résultante $N'f$ des frottements auxquels elles donnent lieu est égale et opposée à Nf .

Par le point k , où la normale N rencontre SA , je mène des perpendiculaires aux axes des deux roues; la perpendiculaire ky au plan des axes, et la parallèle kz à l'axe SO .

Équilibre des forces qui sollicitent la roue conductrice. — Déterminons d'abord les inclinaisons des forces N et Nf sur les axes kx et ky . En appliquant la formule générale de la trigonométrie sphérique, l'angle trièdre $Sknx$ donne

$$\cos(N, x) = -\cos n k x = \sin \alpha \cos a - \cos \alpha \sin a \sin \theta;$$

l'angle trièdre $Skny$ donne également

$$\cos(N, y) = -\cos(nky) = \cos \alpha \sin \theta.$$

Menons kH parallèle à Nf ; l'angle trièdre $SkHx$ donne

$$\cos(Nf, x) = \cos(Hkx) = \cos \alpha \sin \theta.$$

Enfin

$$\text{angle } Hky = (Nf, y).$$

Pour évaluer les moments de N et Nf par rapport à l'axe SO , je les décompose en trois forces parallèles aux trois axes kx , ky , kz . La composante de N suivant kx donnera seule un moment; la composante de Nf suivant kz n'en donnera pas. Menons nl perpendiculaire au plan Skx , np perpendiculaire à SA ; nl est le bras de levier de la composante de Nf , parallèle à kx . Le triangle npl donne

$$\begin{aligned} nl &= np \sin \theta = nS \sin \alpha \cdot \sin \theta = Sk \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta \\ &= \frac{k\omega}{\sin \alpha} \times \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta. \end{aligned}$$

Je mène nV perpendiculaire à kn ; ωV est le bras de levier de la composante de Nf , parallèle à ky . Or

$$\begin{aligned}\omega V &= \omega k + kV = \omega k + nk \cos nkx = \omega k + sk \sin \alpha \cdot \cos nkx \\ &= \omega k + \frac{\omega k}{\sin \alpha} \times \sin \alpha \cos nkx,\end{aligned}$$

$$\omega V = \omega k \left[1 + \frac{\sin \alpha}{\sin a} (-\sin \alpha \sin a + \cos \alpha \cos a \cos \theta) \right],$$

ou

$$\omega V = \omega k (\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos a \cot a \cos \theta).$$

L'équation des moments sera alors

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} &-Pr + N \cos \alpha \sin \theta \cdot \omega k + Nf \cos \theta \cdot \omega k (\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos a \cot a \cos \theta) \\ &+ Nf \frac{\cos a \sin \theta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \sin \theta}{\sin a} \times \omega k = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(1) \quad Pr = \omega k \cdot N (\cos \alpha \sin \theta + f \cos \theta \cos^2 \alpha + f \cot a \sin \alpha \cos \alpha).$$

On aurait à répéter un calcul identique pour la roue SO' . Cependant la formule relative à la roue conduite, peut se déduire de la figure et de la formule (A), en vertu d'une certaine analogie qu'il est facile de remarquer, mais sur laquelle je n'insisterai pas. De toutes manières,

$$\begin{aligned}-Qr' + N' \cos \alpha \sin \theta \cdot \omega' k + N'f \cos \theta \cdot \omega' k (\cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos a \cot a' \cos \theta) \\ - N'f \cot a' \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos \alpha \sin \alpha \cdot \omega' k = 0,\end{aligned}$$

ou

$$(2) \quad Qr' = N' \times \omega' k (\cos \alpha \sin \theta + f \cos \theta \cos^2 \alpha - f \cot a' \sin \alpha \cos \alpha).$$

Des deux formules (1) et (2) on tire, en remarquant que $N = N'$ et $\frac{\omega k}{\omega' k} = \frac{r}{r'}$,

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin \theta + f \cos \theta \cos \alpha + f \cot a \cdot \sin \alpha}{\sin \theta + f \cos \theta \cos \alpha - f \cot a' \cdot \sin \alpha}.$$

Telle est la relation qui doit exister entre la puissance et la résistance, lorsque ces deux forces se font équilibre et que l'on ne tient compte que du frottement des dents.

Si ce frottement n'existait pas, on aurait $f = 0$ et $\frac{P}{Q} = 1$; donc la différence $P - Q$ est la force tangente F , à la circonférence OA , qui équivaut au

frottement. On trouve facilement que

$$(3) \quad F = Qf \frac{\sin \alpha (\cot a + \cot a')}{\sin \theta + f \cos \theta \cos \alpha - f \cot a' \cdot \sin \alpha}.$$

Cette formule montre que le frottement sera d'autant moindre que α sera plus petit, ou que le contact des deux dents aura lieu sur une moindre étendue, ou encore que les dents seront plus petites.

On peut donner une autre forme à l'expression (3). Dans le plan OSO', je mène la perpendiculaire BAC à SA. Je pose

$$\rho = AB, \quad \rho' = AC, \quad p = Am;$$

on a

$$\sin \alpha = \frac{p}{AS}, \quad \cot a' = \frac{AS}{\rho'}, \quad \cot a = \frac{AS}{\rho},$$

$$(4) \quad F = \frac{Qfp \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right)}{\sin \theta + f \cos \theta \cos \alpha - \frac{f}{\rho'} p}.$$

Formule aussi simple que celle des engrenages cylindriques.

On retombe, du reste, sur cette dernière formule, en supposant que α décroisse indéfiniment en même temps que p , ρ , ρ' restent finis : à la limite on a

$$(5) \quad F = \frac{Qfp \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right)}{\sin \theta + f \cos \theta - \frac{f}{\rho'} p}.$$

ρ , ρ' sont les rayons des circonférences primitives, p la normale commune aux deux dents, θ l'angle de la normale avec la ligne des centres.

Cas d'un engrenage conique à dents très-petites. — Dans la formule (4) on peut, sans commettre une erreur sensible, remplacer $\cos \alpha$ par 1, puisque α est par hypothèse très-petit. On a donc

$$F = \frac{Qfp \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right)}{\sin \theta + f \cos \theta - \frac{f}{\rho'} p}.$$

Ce qui revient à la formule admise pour ce cas.

§ II. — *Évaluation du travail du frottement dans les engrenages coniques.*

Nous avons trouvé, pour la force équivalente au frottement,

$$F = Qf(\cot \alpha + \cot \alpha') \frac{\sin \alpha}{\sin \theta + f \cos \theta \cos \alpha - f \cot \alpha' \sin \alpha};$$

si ds est l'élément de la circonférence OA , le travail élémentaire du frottement sera $F ds$. Or il existe une relation entre s , θ , α , car la connaissance de ces quantités permet de construire les surfaces de dents; mais ces surfaces jouissent d'une propriété non indiquée par la construction, celle d'avoir le plan SAm pour plan normal. Pour déterminer cette relation, je considère deux points A , A' (*fig. 1 et 3*) de la circonférence OA , infiniment voisins, et par ces deux points je mène deux plans normaux à la surface de la dent de la roue conductrice; nous aurons

$$\text{angle } ASm = \alpha, \quad \text{angle } ASm' = \alpha + d\alpha, \quad mm' = ds.$$

Du point S comme centre, avec un rayon égal à SA , je suppose décrite une sphère, qui détermine le quadrilatère sphérique $AA'mm'$. En négligeant les infiniment petits du deuxième ordre, l'aire $AA'mm'$ peut être considérée comme un élément plan perpendiculaire au plan SAm ; le fuseau Smm' est également perpendiculaire à ce même plan, et la projection de l'aire $SA'm'$ sur le plan SAm est égale à cette aire. D'ailleurs l'aire SAm est évidemment égale à la différence des projections des aires $A'Sm'$ et ASA' sur son plan; d'après cela, on trouve facilement

$$\frac{\overline{SA}^2}{2} \alpha = \frac{\overline{SA}^2}{2} (\alpha + d\alpha) - \frac{SA}{2} ds \times \sin \theta,$$

d'où

$$(5) \quad ds = SA \frac{d\alpha}{\sin \theta} = \rho \frac{\cot \alpha \cdot d\alpha}{\sin \theta} = \rho' \frac{\cot \alpha' \cdot d\alpha}{\sin \theta},$$

en appelant, comme nous l'avons déjà fait, ρ , ρ' les portions AB , AC de la perpendiculaire BC à la droite SA . D'où l'on tire

$$F ds = Qf(\rho \cot^2 \alpha + \rho' \cot^2 \alpha') \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sin \theta (\sin \theta + f \cos \theta \cos \alpha - f \cot \alpha' \sin \alpha)};$$

partant, pour le travail du frottement relatif à l'étendue entière de l'arc Im , censé limité au cône primitif de la roue conductrice,

$$(6) \quad T = Q f (\rho \cot^2 a + \rho' \cot^2 a') \int_0^\alpha \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sin \theta (\sin \theta + f \cos \theta \cos \alpha - f \cot a' \sin \alpha)}.$$

Dans chaque cas particulier, la forme de la surface de la dent de la roue SO sera donnée par une relation entre θ et α , $\theta = f(\alpha)$. De sorte que l'intégration pourra s'effectuer rigoureusement, ou par quadratures.

Intégration par série. — Si l'on développe l'intégrale de l'équation (6) d'après la série de Maclaurin, on trouve

$$T = Q f (\rho \cot^2 a + \rho' \cot^2 a') \left[\frac{1}{\sin \theta_0 (\sin \theta_0 + f \cos \theta_0)} \times \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \times \dots \right],$$

en appelant θ_0 la valeur de θ correspondante à $\alpha = 0$. Si α est très-petit, ou si les dents sont très-petites, on peut se borner au premier terme, attendu que les coefficients des puissances de α n'acquièrent pas de grandes valeurs dans les cas ordinaires d'applications, et l'on a pour formule simplifiée,

$$(7) \quad T = \frac{1}{2} Q f \frac{(\rho \cot^2 a + \rho' \cot^2 a') \alpha^2}{\sin \theta_0 (\sin \theta_0 + f \cos \theta_0)};$$

en remplaçant α^2 par $\sin^2 \alpha$, et remarquant que

$$\sin \alpha \cot a = \frac{p}{\rho} \quad \text{et} \quad \sin \alpha \cot a' = \frac{p}{\rho'},$$

on retombe sur la formule ordinaire

$$(8) \quad T = \frac{Q f}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) \frac{p^2}{\sin \theta_0 (\sin \theta_0 + f \cos \theta_0)}.$$

Engrenages cylindriques. — Nous avons déjà déduit le frottement dans les engrenages cylindriques du frottement dans les engrenages coniques. Pour déduire le travail du frottement relatif au premier système du travail du frottement dans le deuxième, il suffit de chercher ce que devient la relation

$$ds = \frac{\rho \cot a}{\sin \theta} d\alpha,$$

lorsque les engrenages coniques deviennent cylindriques. Or on a

$$p = \rho \cot \alpha \sin \alpha, \quad dp = \rho \cot \alpha \cos \alpha d\alpha,$$

$$ds = \frac{dp}{\cos \alpha \sin \theta};$$

à la limite, α est nul, $s, p, \theta, \rho, \rho'$ restent finis, et, par conséquent,

$$(9) \quad ds = \frac{dp}{\sin \theta}.$$

On peut arriver directement à cette formule en menant (*fig. 4*), par deux points A, A' infiniment voisins de la circonférence O, deux normales à la courbe Im, et remarquant que Am est égale à la projection de A'm' sur Am, diminuée de la projection de AA', ce qui donne

$$p = p + dp - ds \sin \theta, \quad \text{ou} \quad dp = ds \sin \theta.$$

Le travail élémentaire du frottement sera, en se reportant à la formule (a),

$$F ds = \frac{Q f p \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right)}{\sin \theta + f \cos \theta - \frac{f p}{\rho'}} \times \frac{dp}{\sin \theta},$$

et, pour le travail total dans tout le parcours de Im,

$$(10) \quad T = Q f \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) \int_0^p \frac{p dp}{\sin \theta \left(\sin \theta + f \cos \theta - \frac{f p}{\rho'} \right)}.$$

L'équation

$$\theta = f(p),$$

de la courbe Im, permettra d'effectuer cette intégration.

Développement en série. — La formule de Maclaurin donne ici

$$T = Q f \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) \left[\frac{1}{\sin \theta_0 (\sin \theta_0 + f \cos \theta_0)} \times \frac{p^2}{1.2} + \dots \right];$$

si les dents sont très-petites, on peut s'en tenir au premier terme, et l'on retombe ainsi sur

$$T = \frac{Q f}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) \frac{p^2}{\sin \theta_0 (\sin \theta_0 + f \cos \theta_0)},$$

autre formule connue.

§ III. — Application des formules précédentes à quelques cas particuliers.

CAS DES ENGRENAGES CONIQUES. — 1°. *Engrenage à flancs*. — La surface enveloppée est un plan $SO'I'$ (fig. 6). L'angle trièdre rectangle $SO'mA$ donne, d'après une formule de la trigonométrie sphérique,

$$\operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tang} a' \cos \theta;$$

d'où $\sin \alpha \cot a' = \cos \theta \cos \alpha$; ce qui réduit l'intégrale de la formule (6) à

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sin^2 \theta}, \text{ ou à } \\ & - \int \frac{\cos^2 \alpha d \cos \alpha}{\cos^2 \alpha (1 + \cot^2 a') - \cot^2 a'} \\ & = - \sin^2 a' \int \frac{\cos^2 \alpha d \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 a'} = - \sin^2 a' \left(\cos \alpha + \cos^2 a' \int \frac{d \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 a'} \right) \\ & = - \sin^2 a' \left[\cos \alpha + \cos^2 a' \int \frac{1}{2 \cos a'} \left(\frac{1}{\cos \alpha - \cos a'} + \frac{1}{\cos \alpha + \cos a'} \right) d \cos \alpha \right] \\ & = - \sin^2 a' \left(\cos \alpha + \frac{\cos a'}{2} \log \frac{\cos \alpha - \cos a'}{\cos \alpha + \cos a'} \right) + C. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad T &= Q f(\rho \cot^2 a + \rho' \cot^2 a') \sin^2 a' \left\{ \cos \alpha - 1 - \frac{\cos a'}{2} \left[\log \left(\frac{\cos \alpha - \cos a'}{1 - \cos a'} \right) - \log \left(\frac{\cos \alpha + \cos a'}{1 + \cos a'} \right) \right] \right\}, \\ (\beta) \quad T &= Q f(\rho \cot^2 a + \rho' \cot^2 a') \sin^2 a' \left\{ \frac{\cos a'}{2} \log \left[\frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a'}{\operatorname{tang} \left(\frac{\alpha + a'}{2} \right) \operatorname{tang} \left(\frac{a' - \alpha}{2} \right)} \right] - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\}. \end{aligned}$$

On peut, du reste, exprimer T en fonction de l'arc s , car la formule (5) permet d'exprimer α en fonction de s , et donne

$$\sin \alpha = \sin a' \times \sin \left(\frac{s}{\rho' \cos a'} \right).$$

Je ne reproduirai pas le résultat, qui est d'une assez grande complication.

Remarque. — Le cas des engrenages cylindriques à flancs se déduit facilement de ce qui précède; car remarquant que $\rho' \cot a' = \rho \cot a$, l'équation (α) donne

$$T = Q f \left(\rho \frac{\rho'}{\rho^2} \cos^2 a' + \rho' \cos^2 a' \right) \left\{ -1 + \cos \alpha - \frac{\cos a'}{2} \left[\log \left(\frac{\cos \alpha - \cos a'}{1 - \cos a'} \right) - \log \left(\frac{\cos \alpha + \cos a'}{1 + \cos a'} \right) \right] \right\};$$

et, en passant à la limite,

$$T = -Qf\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)\rho'^2 \lim \log\left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha'}{1 - \cos \alpha'}\right).$$

Or

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha' \cos^2 \theta}},$$

par suite,

$$\lim\left(\frac{\cos \alpha - \cos \alpha'}{1 - \cos \alpha'}\right) = \frac{1}{\sin \theta};$$

donc

$$T = Qf\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)\rho'^2 \log \frac{1}{\sin \theta}.$$

2°. *Engrenage à développantes de cônes.* — Ici θ est constant, et la formule du travail peut s'écrire ainsi :

$$T = -\left(\frac{\rho \cot^2 \alpha + \rho' \cot^2 \alpha'}{\sin \theta \cos \theta}\right) \int_0^\alpha \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) d\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{\cot \alpha'}{\cos \theta} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\tan \theta}{f}}.$$

Cette intégrale rentre, comme cas particulier, dans une autre plus générale, dont nous renvoyons l'expression dans une Note spéciale, placée à la fin du Mémoire, parce qu'elle se reproduit plus loin.

CAS DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES. — 1°. *Engrenage à flancs.* — On a

$$p = \rho' \sin \theta, \quad dp = \rho' \cos \theta d\theta,$$

l'intégrale de la formule (10) se réduit à

$$\rho'^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta \frac{d \sin \theta}{\sin \theta} = \rho'^2 \log \frac{1}{\sin \theta};$$

d'où

$$T = Qf\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)\rho'^2 \log \frac{1}{\sin \theta},$$

formule déjà trouvée.

On obtient l'expression de T en fonction de s , en remarquant, soit directement, soit d'après la formule (10), que $\frac{s}{\rho} = \frac{\pi}{2} - \theta$; et l'on a

$$T = Qf\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)\rho'^2 \log\left(\frac{1}{\cos \frac{s}{\rho}}\right).$$

2°. *Crémaillère*. — Dans le cas où la crémaillère est conduite, on a

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \rho' = \infty \quad \text{et} \quad T = \frac{fQ}{\rho} \cdot \frac{p^2}{2} = \frac{fQ}{\rho} \cdot \frac{s^2}{2}.$$

Si la crémaillère conduit, on obtient T en supposant ρ' infini dans les formules du cas précédent; ce qui donne

$$T = Qf\rho' \log\left(\frac{1}{\sin\theta}\right) = Qf\rho' \log\left(\frac{1}{\cos\frac{s}{\rho'}}\right),$$

ρ' étant alors le rayon de la roue.

3°. *Engrenage à développantes de cercles*. — θ est constant, et

$$T = Qf\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) \times \frac{1}{\sin\theta} \times \int_0^p \frac{pdp}{\sin\theta + f\cos\theta - \frac{fp}{\rho'}}.$$

On est ainsi ramené à l'intégrale

$$\int \frac{pdp}{a + bp} = \frac{p}{b} - \frac{a}{b^2} \log(a + bp);$$

ce qui donne finalement

$$T = \frac{Qf}{\sin\theta} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) \left[-\frac{p\rho'}{f} + \left(\frac{\sin\theta + f\cos\theta}{f^2}\right) \rho'^2 \log\left(\frac{\sin\theta + f\cos\theta}{f\cos\theta + \sin\theta - \frac{pf}{\rho'}}\right) \right].$$

4°. *Engrenage à fuseaux*. — Si r est le rayon d'un fuseau, on a

$$p = 2\rho' \cos\theta - r$$

et

$$T = -4Qf\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) \rho'^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{\left(\cos\theta - \frac{r}{2\rho'}\right) d\theta}{\sin\theta - f\cos\theta + \frac{fr}{\rho'}}.$$

Nous renvoyons à la Note citée plus haut, et qui se trouve à la fin du *Mémoire*, pour la détermination de cette intégrale. Mais, ici, il n'y a aucune ambiguïté; car le radical $\sqrt{1 - s^2 \cos^2 m} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho'^2} \sin^2 m}$ est toujours réel; de sorte qu'il faut prendre la première forme de l'intégrale traitée dans

la Note indiquée. On a ainsi

$$T = -4Qf \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) \rho'^2 \cos m \left\{ \theta - \frac{\pi}{2} + \cot m \log \left[\frac{\sin(\theta + m) - \frac{r}{\rho'} \sin m}{\cos m - \frac{r}{\rho'} \sin m} \right] - \frac{r}{\rho'} \left(\frac{-\sin m + \frac{1}{2 \sin m}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho'^2} \sin^2 m}} \right) \right\} \left\{ \begin{array}{l} \log \left[\frac{-\frac{r}{\rho'} \sin m \tan\left(\frac{\theta + m}{2}\right) + 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho'^2} \sin^2 m}}{-\frac{r}{\rho'} \sin m \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m}{2}\right) + 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho'^2} \sin^2 m}} \right] \\ - \log \left[\frac{-\frac{r}{\rho'} \sin m \tan\left(\frac{\theta + m}{2}\right) + 1 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho'^2} \sin^2 m}}{-\frac{r}{\rho'} \sin m \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m}{2}\right) + 1 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho'^2} \sin^2 m}} \right] \end{array} \right.$$

m est ici le supplément de l'angle de frottement.

Si le rayon r est assez petit pour que l'on puisse négliger les termes en $\frac{r}{\rho'}$, on a la formule approchée

$$T = 4Qf \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) \rho'^2 \left[\frac{1}{2} \pi - \theta - \cot m \log \frac{\sin(\theta + m)}{\cos m} \right].$$

VIS SANS FIN.

§ I. — Recherche de l'intensité du frottement.

Nous rappellerons que le filet de la vis, censée verticale, est (*fig. 5*) engendré par une horizontale s'appuyant sur une hélice du cylindre primitif, et sur l'axe de ce cylindre; que les dents de la roue sont des cylindres dont les génératrices sont inclinées sur l'horizon, du même angle α que les tangentes à l'hélice, et dont les bases sont les développantes de la circonférence primitive de la roue; que le contact d'une dent avec le filet se trouve sur la génératrice zB du cylindre primitif, tangente à la circonférence primitive de la roue; enfin, nous négligerons, comme précédemment, les frottements étrangers, et nous admettrons que le mouvement est uniforme, que la puissance P est tangente à la base du cylindre primitif, et la résistance Q tangente à la circonférence primitive de la roue.

Soient α l'inclinaison de la tangente à l'hélice sur l'horizon; ω la rotation qOB que devra effectuer la roue pour que la dent arrive à son dernier

point de contact B, avec la vis ; $R = OB$ rayon du cercle primitif de la roue, de sorte que $Bb = Bq = R\omega$. Soit σ l'arc de la circonférence de base du cylindre primitif déterminé par les positions extrêmes B et b du contact : $d\sigma$, $d\omega$ sont négatifs.

La vis est en équilibre sous l'action de la force P, de la pression N de la dent de la roue sur le filet, et du frottement résultant Nf , dont nous allons d'abord déterminer la direction. Remarquons, à cet effet, que l'élément de surface hélicoïdale en b est animé d'un mouvement suivant la tangente à l'hélice bT , qui est représenté par la valeur absolue de la différentielle de l'arc d'hélice, ou

$$-\frac{d\sigma}{\cos \alpha} = -\frac{Rd\omega}{\sin \alpha}.$$

D'un autre côté, la dent bq se meut sur le filet dans la direction bx ; car les éléments de bq viennent successivement se placer sur le filet : ce mouvement est représenté par la différentielle de l'arc bq , ou par $B\epsilon$ multiplié par l'angle de contingence du cercle $R\omega \times -\frac{dR\omega}{R} = -R\omega d\omega$. Le mouvement relatif du filet de la vis sur la roue, supposée en repos, résultera du premier mouvement et du mouvement égal et directement opposé au second degré, c'est-à-dire dirigé suivant bx' . Si a , b , c sont les inclinaisons de ce mouvement relatif sur les trois axes rectangulaires bx , by , bz , on a

$$\begin{aligned} \cos a &= \frac{R\omega d\omega}{\sqrt{R^2\omega^2 d\omega^2 + \frac{R^2 d\omega^2}{\sin^2 \alpha}}} = \frac{-\omega \sin \alpha}{\sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \alpha}}, \\ \cos b &= \frac{-R \frac{d\omega}{\sin \alpha} \times \frac{1}{\cos \alpha}}{\sqrt{R^2\omega^2 d\omega^2 + \frac{R^2 d\omega^2}{\sin^2 \alpha}}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha + 1}}, \\ \cos c &= \frac{-R \frac{d\omega}{\sin \alpha} \times \sin \alpha}{\sqrt{R^2\omega^2 d\omega^2 + \frac{R^2 d\omega^2}{\sin^2 \alpha}}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha + 1}}. \end{aligned}$$

Remarque. — Le mouvement relatif dont nous venons de parler est le glissement de la dent de la roue sur le filet : ce glissement est donc exprimé par

$$\sqrt{\frac{R^2\omega^2}{\sin^2 \alpha} + R^2\omega^2 d\omega^2} = -R \sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \alpha} \times \frac{d\omega}{\sin \alpha}.$$

Les angles a, b, c seront les inclinaisons du frottement du filet de la vis sur la dent bq . Je puis supposer la puissance P dirigée suivant l'horizontale by . Les composantes des forces, P, N, Nf , suivant by , sont les seules qui donnent des moments par rapport à l'axe du cylindre. L'équilibre de ces forces est donc exprimé par l'équation

$$(1) \quad P - \frac{Nf \cos \alpha}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha + 1}} - N \sin \alpha = 0.$$

La roue est sollicitée, 1° par la force Q , que l'on peut supposer dirigée suivant bz ; 2° par une force N' égale et opposée à N ; 3° par un frottement égal et opposé à Nf , c'est-à-dire ayant pour inclinaisons a, b, c sur les axes bx, by, bz . La somme des composantes de ces forces $Q, N', N'f$ suivant bz est

$$Q + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha + 1}} \times Nf - N \cos \alpha;$$

sui vant bx ,

$$\frac{Nf \omega \sin \alpha}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha + 1}}.$$

La somme des moments de ces deux forces par rapport à l'axe O devant être nulle, cela donne

$$\left(Q + \frac{Nf \sin \alpha}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha + 1}} - N \cos \alpha \right) R + \frac{Nf \cdot \omega \sin \alpha}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha + 1}} \times R \omega = 0,$$

ou

$$(2) \quad Q + \frac{Nf \sin \alpha}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha + 1}} - N \cos \alpha + \frac{Nf \omega \sin \alpha}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha + 1}} = 0.$$

Des formules (1) et (2) on déduit la relation entre la puissance et la résistance

$$\frac{P}{Q} = \frac{f \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \alpha}}{-f \sin \alpha - f \omega \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Il faut nécessairement, pour que le glissement soit possible, que le dénominateur du second membre soit positif pour toutes les valeurs de ω comprises entre 0 et sa valeur lorsque le contact de la dent de la roue et du filet de la vis commence à avoir lieu.

Si $\omega = 0$, $\frac{P}{Q} = \frac{f \cos \alpha + \sin \alpha}{-f \sin \alpha + \cos \alpha}$, et il faut que $-f \sin \alpha + \cos \alpha > 0$ ou $\tan \alpha < \frac{1}{f}$, ou $\alpha <$ que le complément de l'angle du frottement.

Si le frottement était nul ou $f = 0$, $P - Q \tan \alpha = 0$. La force tangentielle au cylindre primitif équivalente au frottement est donc $P - Q \tan \alpha = F$, ou

$$(3) \quad F = \frac{Q f (1 + \omega^2 \sin^2 \alpha)}{(-f \sin \alpha - f \omega^2 \sin \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \alpha}) \cos \alpha}.$$

§ II. — Évaluation du travail du frottement.

Le travail élémentaire du frottement est $F(-d\sigma) = -F d\sigma = -F \cdot \frac{R d\omega}{\tan \alpha}$,
ou

$$-F d\sigma = -\frac{Q f R (1 + \omega^2 \sin^2 \alpha) d\omega}{(-f \sin \alpha - f \omega^2 \sin \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \alpha}) \sin \alpha}.$$

Ce travail élémentaire peut s'évaluer directement, car l'équation (2) donne

$$Nf = Qf \frac{\sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \alpha}}{(-f \sin \alpha - f \omega^2 \sin \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \alpha})}.$$

Cette expression, multipliée par l'arc de glissement trouvé plus haut, reproduit en effet la formule ci-dessus.

Le travail total sera ainsi :

$$T = \frac{Q f R}{\sin \alpha} \int_{\omega}^0 \frac{-(1 + \omega^2 \sin^2 \alpha) d\omega}{(-f \sin \alpha - f \omega^2 \sin \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \alpha})},$$

ou

$$(4) \quad T = \frac{Q f R}{\sin \alpha} \int_0^{\omega} \frac{(1 + \omega^2 \sin^2 \alpha) d\omega}{(-f \sin \alpha - f \omega^2 \sin \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \alpha})},$$

intégrale qui reste à évaluer.

M. Combes n'est pas arrivé à cette dernière formule, parce qu'il a supposé le frottement dirigé suivant la tangente à l'hélice, ce qui n'a lieu, en réalité, que lorsque le contact est en B.

M. Guillebon, dans une note des Leçons de M. Navier, à l'École des Ponts et Chaussées, n'arrive pas non plus au résultat précédent; il est facile de

voir que cela tient à ce qu'il emploie une décomposition de forces que rien ne justifie.

Développement en série. — La série de Maclaurin,

$$\int_0^x f(x) dx = f(0) x + f'(\theta x) \frac{x^2}{1.2}, \quad \theta < 1,$$

appliquée à l'intégrale précédente, donne

$$T = \frac{QfR}{\sin \alpha} \left[\frac{\omega}{-f \sin \alpha + \cos \alpha} + \frac{\omega^2 \cdot \theta \sin \alpha \cos \alpha (2f \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{1 + \theta^2 \omega^2 \sin^2 \alpha})}{2 (-f \sin \alpha - f \omega^2 \theta^2 \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 + \theta^2 \omega^2 \sin^2 \alpha})^2} \right],$$

ou

$$T = \frac{QfR}{\sin \alpha} \times \frac{\omega}{(-f \sin \alpha + \cos \alpha)} \times \left[1 + \frac{\omega^2 \theta \sin \alpha \cos \alpha (-f \sin \alpha + \cos \alpha) (2f \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{1 + \theta^2 \omega^2 \sin^2 \alpha})}{2 (-f \sin \alpha - f \omega^2 \theta^2 \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sqrt{1 + \theta^2 \omega^2 \sin^2 \alpha})^2} \right].$$

Si ω est très-faible, ou si le contact est peu étendu, si α est assez faible, comme cela arrive le plus souvent, on aura, avec un degré d'approximation très-suffisant,

$$(5) \quad T = \frac{QfR\omega}{\sin \alpha (-f \sin \alpha + \cos \alpha)},$$

car le rapport de l'erreur commise à la valeur approchée de T est sensiblement

$$\frac{\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha (2f \cos \alpha + \sin \alpha)}{2 (-f \sin \alpha + \cos \alpha)},$$

quantité effectivement très-faible, puisqu'elle est du deuxième ordre par rapport à ω .

La formule (5) s'obtient immédiatement, en admettant que le frottement est, pendant toute la durée du contact, le même qu'en B, et déterminant le travail de la force tangentielle à la base du cylindre équivalente à ce frottement.

Intégration de la formule (4). — Par la méthode d'intégration ordinaire, on est ramené à une équation du quatrième degré qu'il serait difficile de décomposer en facteurs simples. On élude cette difficulté en employant le procédé suivant.

Posant

$$\omega \sin \alpha = \cot \varphi,$$

d'où

$$d\omega = -\frac{d\varphi}{\sin \alpha \sin^2 \varphi},$$

on trouve, par des réductions simples,

$$T = -\frac{Q}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \sin \varphi \frac{\sin \alpha}{f \cos \alpha} \right)}.$$

L'équation

$$x^2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{x \sin \alpha}{f \cos \alpha} = 0$$

a pour racines

$$m = \frac{-\sin \alpha + \sqrt{4f^2 + \sin^2 \alpha}}{2f \cos \alpha}, \quad n = \frac{-\sin \alpha - \sqrt{4f^2 + \sin^2 \alpha}}{2f \cos \alpha}.$$

La racine m est plus petite que l'unité, car si l'on supposait $m > 1$, on trouverait $f > \cot \alpha$, ce qui est l'inverse de ce que nous avons trouvé plus haut; d'un autre côté, on a $n > 1$ en valeur absolue. Donc

$$\frac{1}{x^2 \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\tan \alpha}{f} x \right)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-m} + \frac{D}{x-n},$$

$$A = -\frac{1}{mn} = \cos^2 \alpha, \quad B = \frac{A(m+n)}{mn} = \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha}{f}, \quad D = \frac{Bm-A}{m-n}, \quad E = \frac{Bn-A}{n-m};$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\tan \alpha}{f} \sin \varphi \right)} \\ &= A \int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} + B \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} + C \int \frac{d\varphi}{(\sin \varphi - m)} + D \int \frac{d\varphi}{(\sin \varphi - n)}. \end{aligned}$$

$$\text{Or, } 1^\circ \quad \int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\cot \varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \log \tan \frac{\varphi}{2}.$$

2°. Posant $\tan \frac{\varphi}{2} = z$, on trouve

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi - n} = -\frac{2}{n} \int \frac{dz}{\left(z - \frac{1}{n} \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)} = -\frac{2}{n} \arctan \frac{\tan \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}.$$

$$3^{\circ}. \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi - m} = -\frac{2}{m} \int \frac{dz}{\left(z - \frac{1 + \sqrt{1-m^2}}{m}\right) \left(z - \frac{1 - \sqrt{1-m^2}}{m}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \log \left\{ \frac{\tan \frac{\varphi}{2} - \frac{1 + \sqrt{1-m^2}}{m}}{\tan \frac{\varphi}{2} - \frac{1 - \sqrt{1-m^2}}{m}} \right\};$$

ce qui donne, finalement,

$$T = -\frac{Q}{\cos^2 \alpha \sin \alpha} \left\{ \begin{aligned} & -A \cot \varphi + B \log \tan \frac{\varphi}{2} + \frac{C}{\sqrt{1-m^2}} \log \left(\frac{\tan \frac{\varphi}{2} - \frac{1 + \sqrt{1-m^2}}{m}}{\tan \frac{\varphi}{2} - \frac{1 - \sqrt{1-m^2}}{m}} \times \frac{1 - \frac{1 - \sqrt{1-m^2}}{m}}{1 - \frac{1 + \sqrt{1-m^2}}{m}} \right) \\ & - \frac{2D}{n} \left[\arctan \left(\frac{\tan \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \right) - \arctan \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \right] \end{aligned} \right\}$$

Cette formule est trop compliquée pour que l'on puisse en faire usage dans les applications pratiques; mais j'ai cru devoir l'exposer ici, afin de montrer la véritable nature de la solution générale. Pour les cas ordinaires et au degré d'approximation qui convient à ce genre de question, on pourra recourir à la formule (5) exposée plus haut.

NOTE SUR LA DÉTERMINATION DE L'INTÉGRALE $u = \int \frac{(\cos x + q) dx}{\sin x + r \cos x + s}$,
 r, q, s ÉTANT DES CONSTANTES.

Posant $r = \tan m$, puis $x + m = y$, on trouve facilement

$$u = \cos m \left[y + \cot m \cdot \log (\sin y + s \cos m) + \left(\frac{q}{\sin m} - s \cos m \right) \int \frac{dy}{\sin y + s \cos m} \right].$$

Pour obtenir $V = \int \frac{dy}{\sin y + s \cos m}$, je pose $z = \tan \left(\frac{y}{2} \right)$; alors on a

$$V = \frac{2}{s \cos m} \int \frac{dz}{z^2 + 1 + \frac{2z}{s \cos m}}.$$

Selon que l'équation $z^2 + 1 + \frac{2z}{\cos m} = 0$ a ses racines réelles ou imaginaires, on trouve

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-s^2 \cos^2 m}} \left[\log \left(z + \frac{1 - \sqrt{1-s^2 \cos^2 m}}{s \cos m} \right) - \log \left(z + \frac{1 + \sqrt{1-s^2 \cos^2 m}}{s \cos m} \right) \right],$$

ou

$$V = \text{arc tang} \left(\frac{z + \frac{1}{s \cos m}}{\sqrt{1 - \frac{1}{s^2 \cos^2 m}}} \right).$$

Ces expressions, substituées dans u , donnent, en remplaçant y et z par leurs valeurs,

$$\int \frac{(\cos x + q) dx}{\sin x + \text{tang } m \cos x + q} = \cos m \left\{ x + m + \cot m \log [\sin(x+m) + s \cos m] \right\} \\ + \frac{(q \cot m - s \cos^2 m)}{\sqrt{1-s^2 \cos^2 m}} \left\{ \begin{array}{l} \log \left[\frac{\text{tang} \left(\frac{x+m}{2} \right) + \frac{1 - \sqrt{1-s^2 \cos^2 m}}{s \cos m}}{\text{tang} \left(\frac{x+m}{2} \right) + \frac{1 + \sqrt{1-s^2 \cos^2 m}}{s \cos m}} \right] \\ \text{ou} \\ \text{arc tang} \left[\frac{\text{tang}(x+m) + \frac{s}{\cos m}}{\sqrt{1 - \frac{1}{s^2 \cos^2 m}}} \right] \end{array} \right\} + \text{const.}$$

qui est l'expression cherchée.

TABLE DES MATIÈRES.

| | Pages. |
|---|--------|
| MÉMOIRE SUR LES SYSTÈMES FORMÉS PAR DES POINTS DISTRIBUÉS RÉGULIÈREMENT SUR UN PLAN OU DANS L'ESPACE; par M. <i>A. Bravais</i> | 1 |
| § I. Définitions préliminaires..... | Ib. |
| § II. Des Réseaux en général..... | 8 |
| § III. Des Réseaux symétriques..... | 26 |
| Classification des Réseaux symétriques..... | 31 |
| Des Rangées de même espèce dans les Réseaux symétriques..... | 32 |
| § IV. Des Assemblages en général..... | 36 |
| § V. Des Assemblages symétriques..... | 57 |
| Symétrie binaire..... | 65 |
| Symétrie terbinaire..... | 67 |
| Symétrie ternaire..... | 70 |
| Symétrie quaternaire..... | 75 |
| Symétrie sénnaire..... | 77 |
| Symétrie terquaternaire..... | 79 |
| Classification des Assemblages symétriques..... | 88 |
| Notations symboliques de la symétrie des Assemblages..... | 92 |
| Des différents modes d'arrangement des Sommets dans la même classe d'Assemblages.. | 94 |
| Des plans réticulaires de même espèce et des Rangées de même espèce dans les Assem- blages symétriques..... | 98 |
| § VI. Des Assemblages polaires..... | 103 |

| | |
|--|-----|
| MÉMOIRE SUR LE JAUGEAGE DES COURS D'EAU A FAIBLE OU A MOYENNE SECTION; par M. <i>P. Boileau</i> | 129 |
| Introduction..... | Ib. |
| Description de l'observatoire hydraulique établi à Metz, en 1846..... | 133 |
| Détermination de la tare du bassin de jauge..... | 139 |

PREMIÈRE PARTIE. — MÉTHODE DES DÉVERSOIRS.

| | |
|---|-----|
| Choix d'un barrage-type..... | 141 |
| Circonstances générales des expériences et indication des sujets traités..... | 142 |
| DONNÉES NATURELLES. — Caractères distinctifs des diverses espèces de nappes liquides. — Phé- nomènes de mouvement..... | 144 |

TABLE DES MATIÈRES.

255

| | Pages. |
|--|--------|
| Propriétés fondamentales des tubes plongés en amont d'un barrage déversoir..... | 151 |
| Étude du profil longitudinal de la surface liquide en amont d'un barrage : pentes et dépressions des différentes parties de cette surface; comparaison de la hauteur de la section initiale de la veine avec celle de la colonne des tubes hydrostatiques..... | 154 |
| Observation relative à la pression qui soutient cette colonne..... | 159 |
| Examen du rapport entre les charges indiquées par le tube hydrostatique et les épaisseurs des nappes mesurées dans le plan vertical du barrage..... | 160 |
| CALCUL DE LA DÉPENSE. — Examen des formules proposées antérieurement pour le calcul des dépenses d'eau faites par les déversoirs..... | 164 |
| Nouvelle formule sans coefficient de correction..... | 167 |
| Détermination pratique des éléments du calcul..... | 170 |
| Vérifications expérimentales de la formule proposée..... | 173 |
| Examen de l'influence de la largeur des déversoirs..... | 179 |
| Résultats relatifs aux canaux à section trapézoïdale..... | 183 |
| Observation concernant les jaugeages effectués antérieurement dans des canaux à section trapézoïdale... .. | 189 |
| Expériences et observations relatives au cas des barrages noyés par un gonflement des eaux d'aval. | 190 |
| Expériences et observations relatives aux barrages obliques et aux barrages en chevrons..... | 193 |
| Barrages établis dans une portion de canal dont la largeur n'est point constante. — Vérification remarquable de la nouvelle formule..... | 199 |

DEUXIÈME PARTIE. — ORIFICES AVEC CHARGE SUR LE SOMMET.

| | |
|---|-----|
| Programme des expériences..... | 202 |
| DONNÉES NATURELLES, ou observations des phénomènes auxquels donne lieu l'écoulement par les orifices sans contraction latérale, la veine étant, ou libre, ou gênée par un gonflement des eaux d'aval..... | 203 |
| Trajectoires des grandes veines liquides tombant librement dans l'atmosphère..... | 206 |
| Nouveaux résultats concernant les propriétés des colonnes hydrostatiques. — Ensemble de la question de la conservation des pressions dans les veines fluides..... | 207 |
| Différents caractères des remous produits par un gonflement des eaux du canal de fuite..... | 212 |
| Phénomènes du remous superficiel d'amont; leur correspondance avec la forme des dépôts au fond du lit..... | 214 |
| CALCUL DE LA DÉPENSE. — Indication des travaux antérieurs. — Caractère particulier de l'écoulement dans les nouvelles expériences..... | 216 |
| Formules sans coefficient de correction. — Vérifications expérimentales..... | 220 |
| Proposition relative à la transmission des pressions par les veines liquides. — Mouvement d'une onde superposée à une couche d'eau en repos..... | 228 |
| Dépense des orifices avec contraction sur les côtés supérieur et inférieur..... | 230 |
| Conséquence générale relative à l'influence des modifications de courbure des veines et des nappes fluides sur la dépense des orifices de divers genres..... | 231 |
| Légende des tableaux des résultats d'expériences..... | 233 |

| | Pages. |
|---|--------|
| MÉMOIRE SUR LE FROTTEMENT DES ENGRENAGES CONIQUES ET DE LA VIS SANS FIN; par M. H. Resal..... | 235 |
| ENGRENAGES CONIQUES. — § I. — Recherche de l'intensité du frottement..... | 236 |
| § II. — Évaluation du travail du frottement dans les engrenages coniques..... | 240 |
| § III. — Application des formules précédentes à quelques cas parti- culiers..... | 243 |
| VIS SANS FIN. — § I. — Recherche de l'intensité du frottement | 246 |
| § II. — Évaluation du travail du frottement..... | 249 |
| — | |
| NOTE SUR LA DÉTERMINATION DE L'INTÉGRALE $u = \int \frac{(\cos x + q) dx}{\sin x + r \cos x + s}$, r, q, s ÉTANT DES CONSTANTES; par M. H. Resal..... | 252 |

PLANCHES.

Planches I et II (Mémoire de M. Bravais).

Planches III, IV, V (Mémoire de M. Boileau).

Planche VI (Mémoire de M. Resal).

ERRATA.

Page 7, ligne 10, *au lieu de* OA, OB, OC, *lisez* OA, OB, OD
 Page 12, ligne 27, *au lieu de* OP et OR, *lisez* OP et OB
 Page 16, ligne 2, *au lieu de* mX, nY, *lisez* mX, nX
 Page 31, ligne 1, *au lieu de* a' b' c' d', *lisez* a' b' c'
 Page 39, ligne 18, *au lieu de* $x = g$, $y = -h$, *lisez* $x = h$, $y = -g$
 Page 105, ligne 19, *au lieu de* $[a] = 180^\circ - \mu$, *lisez* $[\alpha] = 180^\circ - \mu$
 Page 126, ligne 7, *au lieu de* $[a^2][\alpha]$, *lisez* $[a]^2[\alpha]$

Fig. 1.

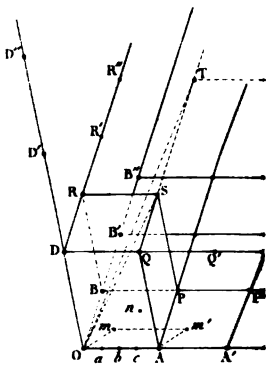


Fig. 7.

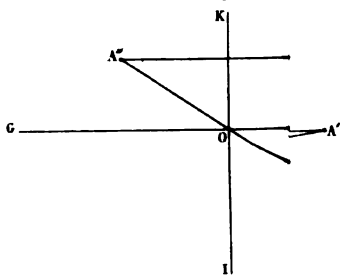
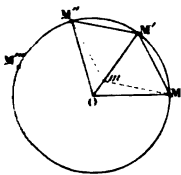


Fig. 13.



100

100

100

11-11-11

11-11-11

11-11-11

3 2044 090 844 390